УЧЕБНИК ЗА ПРВА ГОДИНА ГИМНАЗИСКО ОБРАЗОВАНИЕ

МАТЕМАТИКА I

Д-р Костадин Тренчевски
Д-р Билјана Крстеска
Д-р Ѓорѓи Маркоски
М-р Јасмина Маркоска

lamina

МАТЕМАТИКА I, учебник прва година гимназиско образование
Авторски права © 2025 Арс Ламина

Издава
Арс Ламина – публикации, Скопје 2025

Главен уредник
Бранка Бутариска

Уредник
Билјана Стојоска Златков

Автори
Д-р Костадин Тренчевски
Д-р Билјана Крстеска
Д-р Ѓорѓи Маркоски
М-р Јасмина Маркоска

Јазична редакција
Валентина Бачваровска

Дизајн
Pointer Creative Agency

Графичко и техничко уредување
Арс Ламина – публикации

Печати
Бранко Гапо - графичко производство, Скопје 2025

Тираж
4500

Сите права се задржани. Ниту еден дел од оваа книга не смее да биде препечатуван или пренесуван во каква било форма или со какви било средства, електронски или механички, вклучувајќи и фотокопирање, документирање или да биде зачуван во систем за повторно пронаоѓање без писмена согласност од издавачот.

Овој учебник е одобрен за употреба во средното гимназиско образование, со Одлука за одобрување и употреба на учебник по наставниот предмет Математика за I година гимназиско образование број 26-945/1 од 27.08.2025 година, Министерство за образование и наука на Република Северна Македонија.

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека «Св. Климент Охридски», Скопје

372.8-51(075.3)=163.3

МАТЕМАТИКА I : учебник за прва година гиманзиско образование / Костадин Тренчевски ... [и др.]. - Скопје : Арс Ламина, 2025. - 370 стр.
: илустр. ; 30 см

Други автори: Билјана Крстеска, Ѓорѓи Маркоски, Јасмина Маркоска

ISBN 978-608-280-050-9

1. Тренчевски, Костадин [автор] 2. Крстеска, Билјана [автор] 3. Маркоски, Ѓорѓи [автор] 4. Маркоска, Јасмина [автор]

COBISS.MK-ID 66771717

ПРЕДГОВОР

Учебникот Математика за I година од гимназиско образование е пишуван според новата наставна програма за гимназиите. Со цел да се доближи материјалот до учениците презентацијата на новите содржини е изнесена главно преку примери, со кои ќе се поврзе старото знаење со новата материја. Секоја лекција започнува со повторување на старото знаење и дава вовед и мотивација за претстојните содржини.

Учебникот се состои од шест теми.
Во првата тема „Броеви и операции со броеви" ќе ги повториш и продлабочиш досегашните знаења од множествата и операциите со множествата, како и Декартовиот производ. Потоа, ќе го заокружиш досегашното знаење за броевите од природни па до реални во една целина. На крај, во делот на пропорциите, ќе се запознаеш со каматите (прости и сложени) и даноците, коишто ги плаќаат фирмите и граѓаните во државниот буџет.

Во втората тема „Алгебарски рационални изрази" ќе ги продлабочиш досегашните знаења од степени и корени, како и од цели и дробно-рационални алгебарски изрази. Операциите со корени и полиноми треба да се совладаат до степен на рутинска работа.

Третата тема „Функција, равенка, систем од две равенки и неравенка" е исто така од алгебра. Тука ќе се запознаеш со степенските и експоненцијалните функции, нивните графици, со методите на решавање системи од две линеарни равенки, како и решавање на наравенки.

Четвртата тема „Геометрија" се однесува на геометријата во рамнина (рамнинска или планарна геометрија) и тука се разгледуваат векторите, како и 2Д-формите. Тука прв пат ќе се запознаеш и со тригонометриските функции од остар агол, кои претставуваат основна алатка во инженерската практика. Знаењата од оваа област претставува клуч за натамошното математичко знаење во средно училиште.

Петтата тема „Мерење" исто така е посветена на геометријата, но покрај 2Д-форми се разгледуваат и 3Д-форми. Оваа тема се однесува главно на пресметување плоштина и волумен (зафатнина) на некои 2Д и 3Д-форми.

Шестата тема „Работа со податоци" ги обработува поимите од веројатност, а исто така се однесува и за прибирање податоци, нивна обработка и претставување во разни видови дијаграми.

За полесно следење на лекциите се користат различни полиња.



Во ова поле се дефинираат најважните елементи во лекцијата.



Во ова поле се нагласени својствата или тврдењата во лекцијата.

ПРИМЕР 1

Овде се дадени решени примери и тие најчесто и се избрани од секојдневниот живот.

По примерите вообичаено има и задача во која треба да го примениш стекнатото знаење.

На крајот од секоја лекција се дадени задачи со кои ученикот ќе може да го провери своето знаење, а на крајот од секоја тема има задачи за повторување од целата тема.

По задачите за вежбање во секоја лекција има истражување со кое се бара од учениците да го применат наученото.

И покрај вложените напори, можни се некои технички пропусти, кои секако ќе бидат отстранети при следното издание. Однапред сме благодарни на секоја добронамерна критика во насока на подобрување на учебникот. Особено ќе ни биде мило ако оваа книга придонесе повеќе да ја засакате математиката и да ви стане омилен предмет.

СОДРЖИНА

ТЕМА 1: БРОЕВИ И ОПЕРАЦИИ СО БРОЕВИ

1.1. Множество. Подмножество ... 8
1.2. Еквивалентни множества и кардинални броеви ... 12
1.3. Операции со множества ... 16
1.4. Решавање на проблеми со примена на множества ... 23
1.5. Декартов производ на множества ... 28
1.6. Природни броеви ... 34
1.7. Цели броеви и операции со цели броеви ... 44
1.8. Рационални броеви и операции со рационални броеви ... 49
1.9. Реални броеви и интервали на реалната права ... 59
1.10. Размери и пропорции ... 65
1.11. Процентна сметка ... 74
1.12. Просто и сложено тројно правило ... 82
1.13. Делбена сметка ... 86
1.14. Сметка на смеси ... 89
1.15. Каматна сметка ... 92
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ ... 97

ТЕМА 2: АЛГЕБАРСКИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

2.1. Степен и вредност на степен со показател природен број ... 102
2.2. Квадратен и кубен корен ... 106
2.3. Операции со степени со показател природен број ... 109
2.4. Степен со степенов показател цел број и рационален број ... 115
2.5. Претставување на броевите во експоненцијална форма ... 120
2.6. Алгебарски рационални изрази ... 124
2.7. Собирање и одземање на цели рационални изрази ... 129
2.8. Множење на цели рационални изрази ... 133
2.9. Формули за скратено множење ... 136
2.10. Делење на цели рационални изрази ... 142
2.11. Начини на разложување на полиноми на прости множители ... 146
2.12. Најголем заеднички делител (НЗД) и најмал заеднички содржател (НЗС) на цели рационални изрази ... 151
2.13. Алгебарска дропка. Проширување и скратување на алгебарска дропка ... 154
2.14. Операции со алгебарски дропки ... 159
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ ... 164

ТЕМА 3: ФУНКЦИЈА, РАВЕНКА, СИСТЕМ ОД ДВЕ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКА

3.1. Координати на точка и растојание меѓу две точки во Декартов правоаголен координатен систем ... 167
3.2. Средишна точка на отсечка и плоштина на триаголник ... 171
3.3. Линеарна функција ... 176
3.4. Степенски функции ... 184
3.5. Експоненцијална функција ... 192
3.6. Видови равенки и еквивалентни равенки со една непозната ... 199

3.7. Решавање на линеарни равенки и равенки што се сведуваат на линеарни равенки со една непозната ... 203
3.8. Составување и решавање на линеарни равенки со една непозната ... 208
3.9. Систем од две линеарни равенки со две непознати ... 212
3.10. Методи за решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати ... 217
3.11. Примена на систем од две линеарни равенки со две непознати во проблемски ситуации ... 223
3.12. Видови неравенки и еквивалентни неравенки со една непозната ... 226
3.13. Составување и решавање на линеарни неравенки со една непозната ... 230
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ ... 235

ТЕМА 4: ГЕОМЕТРИЈА

4.1. Вектор. Правец, насока и големина на вектор ... 239
4.2. Еднакви и спротивни вектори. Колинеарни вектори ... 241
4.3. Операции со вектори ... 243
4.4. Координати на вектор ... 248
4.5. Примена на вектори ... 251
4.6. Тригонометриски односи од остар агол во правоаголен триаголник ... 255
4.7. Тригонометриски односи од аглите од 30°, 45° и 60° ... 257
4.8. Тригонометриски односи од ист агол α ... 260
4.9. Решавање правоаголен триаголник ... 262
4.10. Плоштина на триаголник ... 265
4.11. Примена на тригонометриски односи во проблемски ситуации ... 267
4.12. Агли на трансверзалата на две прави ... 274
4.13. Многуаголник ... 279
4.14. Кружница и круг ... 284
4.15. Препокривање на дадена површина во рамнина ... 290
4.16. Слични триаголници ... 294
4.17. Примена на сличноста ... 300
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ ... 305

ТЕМА 5: МЕРЕЊЕ

5.1. Периметар и плоштина на 2Д-форми ... 310
5.2. Пресметување радиус на впишана и опишана кружница ... 316
5.3. Плоштина на круг и делови од кругот ... 318
5.4. Примена на теоремите во проблемски ситуации ... 321
5.5. Плоштина и волумен на 3Д-форми ... 324
5.6. Цилиндар. Плоштина и волумен на цилиндар ... 328
5.7. Примена на плоштина и волумен на 3Д-форми ... 332
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ ... 335

ТЕМА 6: РАБОТА СО ПОДАТОЦИ

6.1. Експериментална веројатност ... 339
6.2. Класична веројатност ... 343
6.3. Прибирање на податоци ... 346
6.4. Графичко претставување на податоци ... 349
6.5. Обработка и толкување на податоци ... 360
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ ... 364

Тема 1:

БРОЕВИ И ОПЕРАЦИИ СО БРОЕВИ

Во изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш:

1. да ги применуваш знаењата за множества при решавање на проблемски ситуации;
2. да користиш реални броеви и операции со нив за да составиш, да решиш и да донесеш заклучок при решавање на проблем во реален контекст;
3. да користиш размер, пропорција и проценти при решавање на проблеми од различни области (економија, образование, медицина, градежништво итн.).

1.1. Множество. Подмножество

Поим за множество

АКТИВНОСТ

Дадени се броевите: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Групирај ги според некое заедничко својство:
а) во две групи, б) во три групи.

Поимот за множество е основен поим во математиката и како таков не се дефинира со помош на други поими. Секое множество се состои од објекти што се обединети во целина според некое нивно **заедничко карактеристично својство**.

ПРИМЕР 1

Множество сочинуваат:

а) сите ученици во еден клас б) сите риби во Преспанското Езеро.

Објектите од кои се состои множеството се викаат **елементи на множеството**.
Множествата ги означуваме со големите печатни букви: $A, B, C, \ldots, M, N, \ldots$, а елементите на секое множество со малите ракописни букви: $a, b, c, \ldots, m, n, \ldots$ од латинската азбука.



За елементите од кои е составено множеството, велиме дека **припаѓаат на множеството**. Ако елементот a припаѓа на множеството A запишуваме $a \in A$.

Ако пак, елементот a **не припаѓа на множеството** A, тогаш запишуваме $a \notin A$. Множеството кое не содржи ниту еден елемент го викаме **празно множество** и го означуваме со симболот $\emptyset$.

ЗАДАЧА 1

а) Дали множеството од триаголници кои имаат по два прави агли е празно множество?
б) Дали множеството на тристагодишни старци на нашата планета е празно множество?

Начини на задавање на множествата

Велиме дека множеството е добро дефинирано кога за секој објект точно може да се каже дали тој е елемент на тоа множество или не е елемент на множеството.

ЗАДАЧА 2

Дали е добро дефинирано множеството:
а) од сите лажици во твојата кујна б) од сите стари мачки?

ПРИМЕР 2

Да го разгледаме множество M на сите едноцифрени природни броеви. Јасно е дека елементи на множеството M се: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и освен нив, множеството M нема други елементи. Тоа го запишуваме со: $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Ваквиот начин на претставување на множество се нарекува **табеларен начин**. Воочи дека набројените елементи се запишани меѓу загради, одвоени со запирки. Кога множеството е зададено табеларно, редоследот на набројување на елементите не е важен.

Освен горниот начин на задавање на множество, постои и друг, наречен **описен начин**, со укажување на заедничкото карактеристични својство што го имаат сите елементи, што припаѓаат на множеството, а го нема ниту еден елемент што не припаѓа на тоа множество.

ПРИМЕР 3

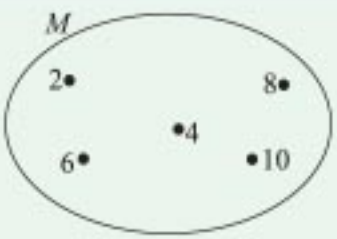
Нека S е множеството на сите ученици на кои роденденот им е на секои четири години. Заедничкото својство на елементите на ова множество е дека секој елемент е ученик кој е роден на 29 февруари. Запишуваме: $S = \{x \mid x \text{ е роден на 29 февруари}\}$.

Читаме: S е множеството од сите елементи x така што x е роден на 29 февруари.

Со цел да се олеснат заклучувањата при разгледување на множествата, се служиме со графички цртежи - наречени **Венови дијаграми**. Секое множество M го претставуваме со множество точки, заградени со произволна затворена крива линија. Означените точки, а понекогаш и сите точки од кривата и заградениот дел од рамнината со неа, ги сметаме како елементи на множеството M.

ПРИМЕР 4

На цртеж 1 е прикажан Веновиот дијаграм на множеството $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.



Цртеж 1

Подмножество

АКТИВНОСТ

Еден програмер ги знае програмските јазици $P = \{\text{Python, Java, C}^{++}, \text{JavaScript}\}$.
За новиот проект треба да знае $R = \{\text{Python, JavaScript}\}$

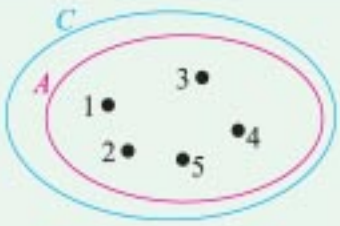
Дали програмерот ќе може да биде вклучен во новиот проект?

ПРИМЕР 5

Нека се дадени множествата: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Секој елемент на множеството A припаѓа на множеството B. Во множеството B постои елемент, на пример, елементот 7, кој не припаѓа на множеството A (цртеж 2).
Секој елемент на множеството A припаѓа на множеството C и секој елемент на множеството C припаѓа на множеството A (цртеж 3).



Цртеж 2



Цртеж 3

Множество A е **подмножество** на множество B ако и само ако секој елемент на множеството A припаѓа на множеството B. Запишуваме $A \subseteq B$.

ПРИМЕР 6

а) За множествата A и B прикажани на цртеж 2 важи $A \subseteq B$.
б) Празното множество е подмножество од секое множество A. Зошто?
в) За множествата A и C прикажани на цртеж 2 важи $A \subseteq C$ и $C \subseteq A$.

Две множества A и B се **еднакви** ако и само ако секое од нив е подмножество на другото, односно $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Запишуваме $A = B$.

ПРИМЕР 7

Дадени се множеството A чии елементи се буквите на зборот мечка и множеството B чии елементи се буквите на зборот камче. Да ги запишеме множествата табеларно:
$A = \{м, е, ч, к, а\}$ и $B = \{к, а, м, ч, е\}$.

Согледуваме дека $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, што значи $A = B$, односно дадените множествата се еднакви.

Множество A е **вистинско подмножество** на множество B, ако секој елемент на множеството A припаѓа на множеството B, и постои елемент во множеството B кој не припаѓа на множеството A. Запишуваме $A \subset B$.

ПРИМЕР 8

а) Множеството од сите паралелограми е вистинско подмножество од множеството од сите четириаголници.

б) Празното множество е вистинско подмножество од секое непразно множество B.

ЗАДАЧА 3

Дали се точни следните тврдења:

а) Множеството на парни броеви е подмножество од множеството природни броеви.

в) Множеството на кучиња од раса пекинезер е вистинско подмножество од множеството на сите кучиња.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Запиши го табеларно множеството:

а) $A=\{x \mid x$ е месец во годината$\}$ б) $B=\{x \mid x$ е содржател на 6 и $40 \leq x \leq 70\}$

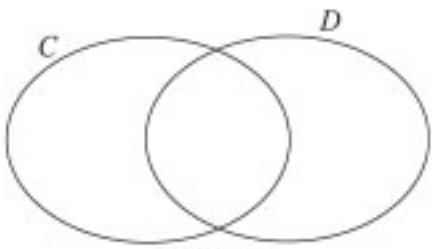
в) $C=\{x \mid x$ е прост број и $20 \leq x \leq 30\}$ г) $D=\{x \mid x \in \mathbb{Z}$ и $50 \leq x^2 \leq 100\}$

2. Множеството A, чии елементи се прости броеви во втората десетка, претстави го:

а) на табеларен начин, б) со Венов дијаграм, в) на описен начин.

3. Претстави ги множествата A и B со Венов дијаграм, ако се знае дека:
$5 \in A, 5 \notin B, 3 \in A, 3 \in B, 7 \notin A, 7 \in B, 4 \in A, 4 \notin B$.

4. Нека $C=\{a, c, d, e, h\}$ и $D=\{b, c, e, f\}$.
Прецртај го Веновиот дијаграм на цртеж 4 и означи ги елементите на соодветните места.



Цртеж 4

5. Дадено е множеството $A=\{x \mid x \in \mathbb{Z}$ и $-2<x<3\}$.
Запиши ги сите:

а) подмножества на множеството A

б) вистински подмножества на множеството A

6. Дадено е множеството $M=\{x \mid x$ е непарен број од втората десетка$\}$. Кое од тврдењата е точно:

а) $\{15, 19\} \subset M$ б) $\{\emptyset\} \subseteq M$ в) $\emptyset \subset M$ г) $\{12,14,16\} \subseteq M$ д) $M \subseteq M$?

7. Најди го x ако: а) $\{-1, 4\} \subset \{-5, -1, 3, x, 7\}$ б) $\{5, 7, 9\} \subset \{-2, 3, 5, 6, 9, x\}$ в) $\{2, 3\} \subset \{-2, 2, x\}$

8. Кое од множествата е празното множество:

а) $A=\{x \mid x \in \mathbb{Z}^+$ и $x \leq 4\}$ б) $B=\{x \mid x \in \mathbb{Q}$ и $x^2=-1\}$

в) $C=\{x \mid x$ е делител на бројот 0$\}$ г) $D=\{x \mid x$ е содржател на бројот 0$\}$

ИСТРАЖУВАЊЕ

„Во едно село, берберот Миле ги бричи сите мажи кои не се бричат сами". Размисли и откриј зошто множеството не е добро зададено. Кој го бричи берберот Миле? Обиди се да дадеш нова формулација така што множеството да биде добро дефинирано.

1.2. Еквивалентни множества и кардинални броеви

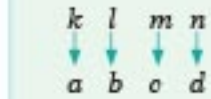
Еквивалентни множества

ПРИМЕР 1

Нека се дадени множествата $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{k, l, m, n\}$.



На секој елемент од множеството A може да му придружиме по еден елемент од множеството B.



На секој елемент од множеството B може да му придружиме по еден елемент од множеството A.



Меѓу елементите на множествата A и B е воспоставена обратноеднозначна кореспонденција.



Ако за множествата A и B важи:

- на секои два различни елементи од множеството A им се придружени различни елементи од множеството B и
- секој елемент на B е придружен од барем еден елемент од A,

тогаш велиме дека е воспоставена **обратноеднозначна кореспонденција** меѓу A и B.



Две множества A и B за кои може да се воспостави обратноеднозначна кореспонденција велиме дека се **еквивалентни множества**. Запишуваме $A \sim B$. Читаме A е еквивалентно со B.

ПРИМЕР 2

Дали се еквивалентни множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $B = \{x \mid x \text{ е ден во седмицата}\}$?

Дадените множества се еквивалентни, бидејќи меѓу нив може да се воспостави обратноеднозначна кореспонденција:



ЗАДАЧА 1

Финансискиот аналитичар ги следи инвестициите во две портфолија:
$A = \{$акции, обврзници, недвижности$\}$ и $B = \{$стоки, акции, криптовалути$\}$

Дали множествата A и B се еквивалентни?

Еднаквите множества се еквивалентни. Обратното не мора секогаш да важи.

ПРИМЕР 3

Дадени се множествата:
$A = \{x \mid x$ е парен природен број помал од 10$\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$,
$C = \{x \mid x$ е годишно време$\}$ и $D = \{$есен, зима, пролет, лето$\}$.
Кои од дадените множества се еквивалентни, а кои се еднакви?

Да ги запишеме табеларно множествата A и C:

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $C = \{$есен, зима, пролет, лето$\}$.

Еднакви се множествата: $A = B$ и $C = D$.

Еквивалентни се множествата: $A \sim B$, $A \sim C$, $A \sim D$, $B \sim C$, $B \sim D$ и $C \sim D$.

ЗАДАЧА 2

Во ресторан за брза храна може да се избере еден од следните оброци за ручек: сендвич со пилешко, сендвич со риба, чизбургер или пилешки прсти. Хана и Харис купуваат ручек според понудата. Запиши две еквивалентни, но не еднакви, подмножества кои се состојат од два различни оброци кои според менито Хана и Харис би можеле да ги изберат за ручек.

Кардинални броеви

АКТИВНОСТ

Ана, Адор, Симон, Теа и Мила отишле на излет. Секој од нив со себе носел ранец.

Излетниците образуваат множество A, а нивните ранци образуваат множество B. Бидејќи секој ранец има свој сопственик, а секој излетник има свој ранец, двете множества се еквивалентни, односно $A \sim B$.

а) Дали може да очекуваме дека бројот на излетници е еднаков со бројот на ранци? Објасни го твојот одговор!

б) Колку е бројот на елементи на множеството A, а колку на множеството B?



Нека $\mathbb{N}_m = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ е множеството од првите m природни броеви и нека A е произволно множеството.

а) Множеството A се вика **конечно множество** ако $A = \emptyset$, или ако постои природен број m така што $A \sim \mathbb{N}_m$.

б) Ако $A = \emptyset$, тогаш велиме бројот на елементи на множеството A е 0, односно множеството A го има **кардиналниот број** 0 и запишуваме $k(A) = 0$.

в) Ако $A \sim \mathbb{N}_m$, тогаш велиме дека бројот на елементи на множеството A е m, односно множеството A го има **кардиналниот број** m и запишуваме $k(A) = m$.

г) Ако множеството A е конечно, исто така запишуваме $k(A) < \infty$.

д) Ако множеството A не е конечно, велиме дека множеството A е **бесконечно** множество. Во овој случај запишуваме $k(A) = \infty$.

И кај бесконечните множества постојат различни кардинални броеви. Такви се на пример кардиналните броеви на множествата на природните броеви $\mathbb{N}$ и реалните броеви $\mathbb{R}$.

ПРИМЕР 4

Најди го кардиналниот број на множеството:

а) $A = \{1, 2, 3\}$ б) $B = \{a, b, c, d\}$ в) $C = \{\emptyset\}$ г) $D = \emptyset$

а) $k(A) = 3$ б) $k(B) = 4$ в) $k(C) = 1$ г) $k(D) = 0$

ПРИМЕР 5

Најди го кардиналниот број на множеството:

а) $M = \{$биологија, физика, хемија, астрономија, геологија$\}$

б) $N = \{$математика, информатика, психологија, економија, лингвистика, педагогија$\}$

а) $k(A) = 5$ б) $k(A) = 6$.

ПРИМЕР 6

Најди го кардиналниот број на множеството:

а) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 2 \leq x \leq 6\}$ б) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } -6 \leq x < 4\}$

Дадените множества ќе ги претставиме табеларно.

а) Бидејќи $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, непосредно согледуваме дека $k(A) = 5$.

б) Од $B = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ заклучуваме дека $k(B) = 10$.

ЗАДАЧА 3

Дали множеството на:

а) природните броеви б) целите броеви в) рационалните броеви

г) реалните броеви д) позитивните реални броеви ѓ) атомите во некој предмет

е конечно или бесконечно множество?

ПРИМЕР 7

Содржателите на бројот 3 го сочинуваат множеството $S = \{3, 6, 9, \ldots\}$.

Даденото множество може да го запишеме на описен начин како: $S = \{n \mid n = 3m$ каде $m \in \mathbb{N}\}$ што ќе ни овозможи да ја согледаме обратно еднозначната кореспонденција меѓу множеството од сите природни броеви и множеството од сите содржатели на бројот 3:

$3 = 3 \cdot 1$ $\quad 6 = 3 \cdot 2$ $\quad 9 = 3 \cdot 3$ $\quad 12 = 3 \cdot 4$ $\quad \ldots\ldots$

1 $\quad$ 2 $\quad$ 3 $\quad$ 4

Според тоа, множеството од сите содржатели на бројот 3 и множеството од сите природни броеви се еквивалентни множества, односно $S \sim \mathbb{N}$.

Да забележиме дека $S \subset \mathbb{N}$, што значи дека множеството природни броеви е еквивалентно со свое вистинско подмножество. Ова може да се случи само кај бесконечните множества.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Биолошка лабораторија групирала 5 различни видови бактерии во еден Петриев сад: $B = \{B1, B2, B3, B4, B5\}$. Во друг сад има примероци од габи: $F = \{F1, F2, F3, F4, F5\}$.
   Дали множествата B и F се еквивалентни? Објасни го твојот одговор!

2. Одбојкарскиот училиштен тим се состои од следниве играчи:
   {Ана, Бети, Кате, Есра, Маја, Теа, Петра, Жана}.
   Запиши две еквивалентни, но не еднакви, подмножества кои се состојат од шест играчи што тренерот би можел да ги избере за следниот натпревар.

3. Дали се еквивалентни множествата делови на една машина:
   $X = \{$завртка, навртка, запчаник$\}$ и $Y = \{$вентил, пумпа, мерач$\}$.

4. Најди го бројот на елементи на множеството:
   а) $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $\quad$ б) $N = \{x \mid x$ е прост број помал од $2\}$
   в) $P = \{2, 3, 4, \ldots, 99\}$ $\quad$ г) $Q = \{x \mid x$ е природен број и $6 < x < 35\}$

5. Најди го кардиналниот број на множеството:
   а) $A = \{H, O, N, Cl, Na\}$
   б) $B = \{$Python, Java, HTML, CSS, JavaScript, C++$\}$
   в) $C = \{$мотор, отпорник, кондензатор, диода$\}$
   г) $C = \{$лаптоп, таблет, телефон, рутер, тастатура, монитор$\}$

6. Воспостави обратно еднозначна кореспонденција меѓу множеството природни броеви и множеството од сите:
   а) парни природни броеви
   б) непарни природни броеви

7. Воспостави обратно еднозначна кореспонденција меѓу множеството природни броеви и множеството од бинарни низи кои започнуваат со 1: $B = \{1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \ldots\}$

8. Еден хотел има бесконечно многу еднокреветни соби, кои се нумерирани со природните броеви: 1, 2, 3,.... Во хотелот нема празни соби, а доаѓа нов гостин.
   На кој начин ќе биде сместен новиот гостин?

1.3. Операции со множества

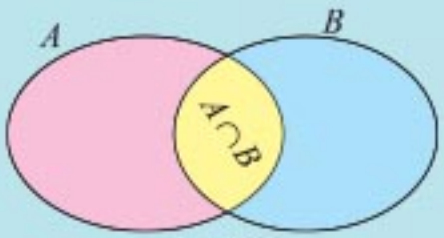
Пресек и унија на множества

Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Броевите 3, 4 и 5 се нивни заеднички елементи. Од нив може да формираме ново множество C, за кое велиме дека е добиено како резултат на операција извршена над множествата A и B.

Множеството $C = \{3, 4, 5\}$, како и операцијата со која е добиено множеството, се вика пресек на множествата A и B и се означува со $C = A \cap B$. Читаме: A пресек B.

Пресек на две множества A и B се вика множеството $A \cap B$ кое се состои од сите елементи кои припаѓаат на множеството A и на множеството B (цртеж 1):

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$



Цртеж 1

ПРИМЕР 1

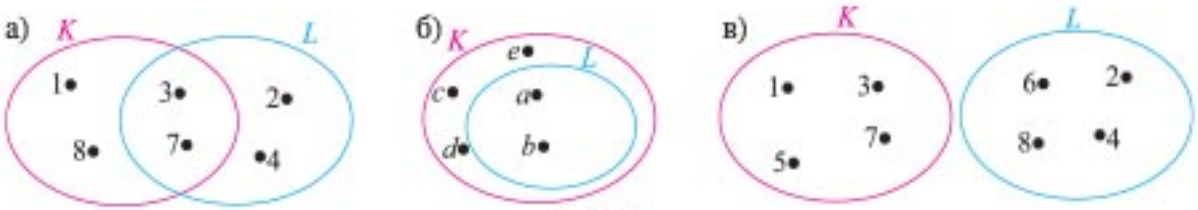
а) $\{2, 3, 5, 7, 9\} \cap \{3, 9, 15\} = \{3, 9\}$

б) Нека R е множеството на сите рамнокраки триаголници, а P е множеството на сите правоаголни триаголници.

Пресекот $R \cap P$ е множеството на сите рамнокраки правоаголни триаголници.

ПРИМЕР 2

Множествата K и L се претставени со Венов дијаграм на цртеж 2.
Определи го множеството $K \cap L$.



Цртеж 2

а) $K \cap L = \{3, 7\}$ б) Бидејќи $L \subset K$, $K \cap L = \{a, b\} = L$ в) $K \cap L = \emptyset$

Ако множествата A и B немаат заеднички елементи, тогаш нивниот пресек е празното множество, односно $A \cap B = \emptyset$.

Две множества, чиј пресек е празното множество, се викаат **дисјунктни множества.**

ПРИМЕР 3

а) $\{1, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6\} = \emptyset$

б) Нека S е множество на сите градови во Србија, а T множество на сите градови во Словенија. Тие две множества се дисјунктни, бидејќи $S \cap T = \emptyset$ (Зошто?).

ЗАДАЧА 1

а) Запиши ги табеларно множествата: $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ и } x < 8\}$ и $F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 5 < x < 10\}$.

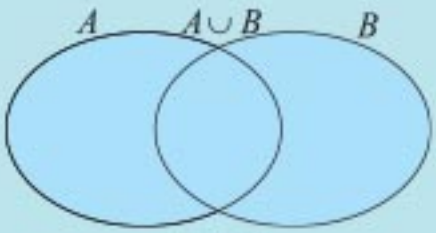
б) Запиши го табеларно множеството $E \cap F$.

Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{3, 5, 6, 8\}$. Ако ги здружиме двете множества во едно, ќе го добиеме множеството $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$. Гледаме дека елементите 3 и 5 припаѓаат и во множеството A и во множеството B, но во здруженото множество S земени се само по еднаш. Објасни зошто!

Така добиеното множество S го викаме унија на множествата A и B и го запишуваме со симболот $S = A \cup B$. Читаме: A унија B. Унија ја викаме уште и операцијата што е извршена на множествата A и B како резултат на која е добиено множеството S.

Унија на множества A и B се вика множеството $A \cup B$ кое се состои од сите елементи кои припаѓаат барем на едно од овие множества (цртеж 3):

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$



Цртеж 3

ПРИМЕР 4

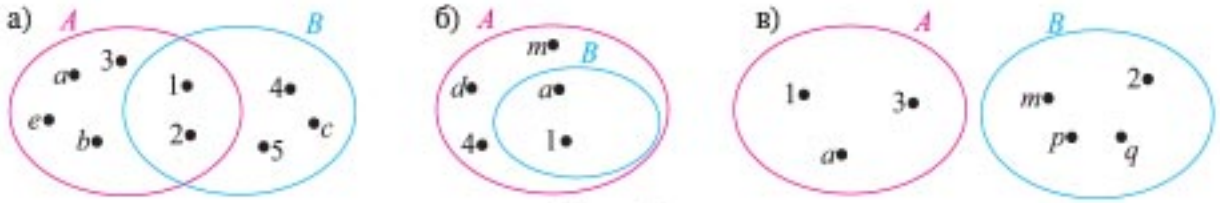
а) $\{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{3, 6, 9, 12\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$;

б) Нека A е множеството на сите непарни природни броеви, а B множеството на сите парни природни броеви. Нивната унија е множеството природни броеви, односно $A \cup B = \mathbb{N}$

ПРИМЕР 5

Множествата A и B се претставени со Венов дијаграм на цртеж 4.

Запиши го табеларно множеството $A \cup B$.



Цртеж 4

а) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, e\}$

б) Бидејќи $B \subset A$, $A \cup B = \{1, 4, a, d, m\} = A$

в) $A \cup B = \{1, 2, 3, a, m, p, q\}$

ЗАДАЧА 2

а) Запиши ги табеларно множествата:
$E = \{x \mid x$ е парен број од втората десетка$\}$ и $F = \{x \mid x$ е непарен број од втората десетка$\}$.

б) Запиши го табеларно множеството $E \cup F$.

АКТИВНОСТ

Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ и $C = \{1, 3, 4, 7\}$.
Дали се точни равенствата:

а) $A \cap B = B \cap A$ б) $A \cup B = B \cup A$

в) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ г) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

д) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ѓ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

За кои било множества A, B и C важат равенствата:

а) $A \cap B = B \cap A$	комутативен закон за пресек
б) $A \cup B = B \cup A$	комутативен закон за унија
в) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	асоцијативен закон за пресек
г) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	асоцијативен закон за унија
д) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	дистрибутивен закон за пресек во однос на унија
ѓ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	дистрибутивен закон за унија во однос на пресек

ЗАДАЧА 3

Провери го асоцијативното својство на унијата и на пресекот за множествата:
$S = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0$ и $x < 4\}$, $T = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $1 < x < 6\}$ и $R = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^+$ и $4 < x < 8\}$.

Да го определиме кардиналниот број на унијата на две множества A и B.

Ако множествата A и B се дисјунктни, кардиналниот број на унијата е збир од кардиналните броеви на множествата, односно $k(A \cup B) = k(A) + k(B)$.

Ако двете множества се сечат, тогаш пресекот е подмножество и од множеството A и од множеството B. Ова значи дека ако го собереме кардиналниот број на множеството A и кардиналниот број на множеството B, ќе го собереме пресекот двапати, па затоа мора да го одземеме еднаш како што е дадено во формулата: $k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B)$.

ПРИМЕР 6

Ако $k(A) = 10$, $k(B) = 20$ и $k(A \cap B) = 4$, колку е $k(A \cup B)$?

Користејќи ја формулата за пресметување на кардинален број на унијата на две множества, добиваме $k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B) = 10 + 20 - 4 = 26$.

ЗАДАЧА 4

Пресметај:

а) $k(A \cup B)$, ако $k(A) = 23$, $k(B) = 17$ и $k(A \cap B) = 7$

б) $k(A \cup B)$, ако $A \cap B = \emptyset$, $k(A) = 35$ и $k(B) = 78$

в) $k(A \cap B)$, ако $k(A) = 24$, $k(B) = 18$ и $k(A \cup B) = 35$

ПРИМЕР 7

Во едно училиште има 20 професори по математика и физика. Од нив 12 предаваат математика (M) и 4 предаваат математика и физика (F). Колку професори предаваат физика?

Според условот во задачата $k(M \cup F) = 20$, $k(M) = 12$ и $k(M \cap F) = 4$.

Со замена во формулата за пресметување на кардиналниот број на унијата

$k(M \cup F) = k(M) + k(F) - k(M \cap F)$ добиваме $20 = 12 + k(F) - 4$ од каде што наоѓаме дека

$k(F) = 12$. Вкупно 12 професори предаваат физика.

ЗАДАЧА 5

Од 35 ученици во еден клас 15 ученици сакаат да играат ракомет (R), а 26 ученици сакаат да играат фудбал. Колку ученици сакаат да играат фудбал и ракомет?

Разлика на две множества

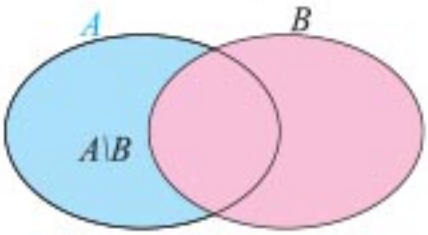
Нека A е множеството на ученици од шаховската секција во класот, а B множеството на ученици од драмската секцијата во класот. Од тие две множества може да се формираат следниве две нови множества.

Првото од нив е множеството на ученици од шаховската секција, кои не се членови на драмската секција. Тоа множество го викаме разлика на множеството A со множеството B, симболички означуваме $A \setminus B$, а читаме: A разлика B.

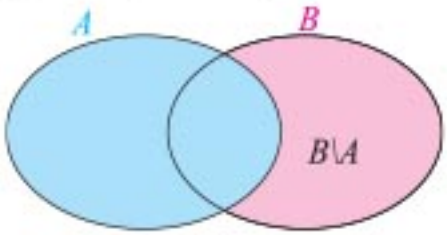
Аналогно, второто множество претставува множество на учениците од драмската секцијата, кои не се членови во шаховската секција. Тоа множество е исто разлика, но на множеството B со множеството A. Запишуваме $B \setminus A$.

Разликата на множество A со множество B се вика множеството $A \setminus B$ кое се состои од сите елементи на множеството A, кои не припаѓаат на множеството B, односно $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$. Слично, $B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ и } x \notin A\}$.

Разликите $A \setminus B$ и $B \setminus A$ се претставени со Венов дијаграм на цртеж 5 и цртеж 6.



Цртеж 5



Цртеж 6

ПРИМЕР 8

а) $\{2, 4, 5, 7, 8\} \setminus \{3, 5, 7, 9\} = \{2, 4, 8\}$

б) Нека A е множеството на ученици во едно одделение кои се повисоки од 150 cm, а B множеството на ученици од истото одделение кои имаат 11 години.

Разликата $A \setminus B$ се состои од оние ученици кои се повисоки од 150 cm и немаат 11 години, а разликата $B \setminus A$ се состои од оние ученици кои имаат 11 години и не се повисоки од 150 cm.

ЗАДАЧА 6

Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{1, 2, 4, 6\}$ и $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

а) Запиши ги табеларно множествата $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B \setminus C$ и $A \setminus (B \setminus C)$.

б) Дали важи равенството $A \setminus B = B \setminus A$?

в) Провери го равенството $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Сигурно забележа дека за операцијата разлика на две множества не важи ниту комутативниот закон, ниту асоцијативниот закон.

ЗАДАЧА 7

Дадени се множествата $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 6\}$, $P = \{3, 5, 7, 9\}$ и $T = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \text{ е парен број од првата десетка}\}$. Определи ги множествата:

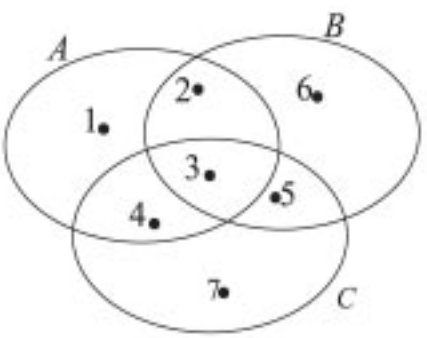
а) $T \setminus M$ б) $P \cup (M \setminus T)$ в) $T \cap (M \setminus P)$

ЗАДАЧА 8

Множествата A, B и C се зададени со Венов дијаграм (цртеж 7). Запиши ги табеларно множествата:

а) $A \cap C$ б) $B \cup A$ в) $B \setminus C$

г) $(A \cap B) \setminus C$ д) $(B \cup C) \setminus A$

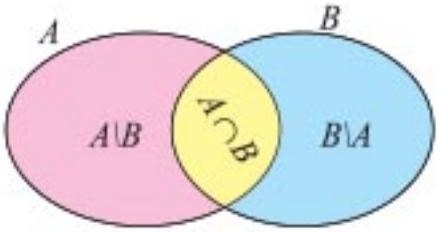


Цртеж 7

Нека A и B се дадени множества. Колку е кардиналниот број на множеството $A \setminus B$?

Можеме да запишеме $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ (цртеж 8).

Множествата $A \setminus B$ и $A \cap B$ се дисјунктни, па со примена на формулата за пресметување на кардинален број на унија на две множества добиваме $k(A) = k(A \setminus B) + k(A \cap B)$ од каде што следува $k(A \setminus B) = k(A) - k(A \cap B)$.



Цртеж 8

ПРИМЕР 9

Вкупно 120 луѓе се изложени на дејство на хемикалијата C_1 и 50 луѓе се изложени на дејство на хемикалијата C_2, а 30 луѓе се изложени на двете хемикалии C_1 и C_2.

а) Колку луѓе се изложени на хемикалијата C_1, но не се изложени на хемикалијата C_2?

б) Колку луѓе се изложени на хемикалијата C_2, но не се изложени на хемикалијата C_1?

Според условот во задачата имаме дека $k(C_1) = 120$, $k(C_2) = 50$ и $k(C_1 \cap C_2) = 30$.

Со примена на формулата за пресметување на кардинален број на разлика на две множества добиваме

а) $k(C_1 \setminus C_2) = k(C_1) - k(C_1 \cap C_2) = 120 - 30 = 90$ б) $k(C_2 \setminus C_1) = k(C_2) - k(C_1 \cap C_2) = 50 - 30 = 20$

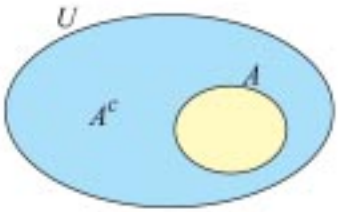
Значи 90 луѓе се изложени на хемикалијата C_1, но не се изложени на хемикалијата C_2, а 20 луѓе се изложени на хемикалијата C_2, но не се изложени на хемикалијата C_1.

При определување на разлика на две множества A и U, од интерес е случајот $A \subset U$ (цртеж 9).

Тогаш разликата $U \setminus A$ се вика **комплемент** на множеството A во однос на множеството U се означува со A^c. Значи, $A^c = U \setminus A$.

Множеството U во однос на кое бараме комплемент обично е фиксно и се нарекува **универзално множество**.

Според тоа, кардиналниот број на комплементот на множеството A во однос на универзалното множество U може да го пресметаме по формулата $k(A^c) = k(U) - k(A)$.



Цртеж 9

ПРИМЕР 10

Комплементот на множеството A = {вторник, четврток} прикажано на цртеж 10, во однос на универзалното множеството $U = \{x \mid x$ е ден во седмицата$\}$ е множеството A^c = {понеделник, среда, петок, сабота, недела} (цртеж 11).



Цртеж 10



Цртеж 11

Може да пресметаме дека $k(A^c) = k(U) - k(A) = 7 - 2 = 5$.

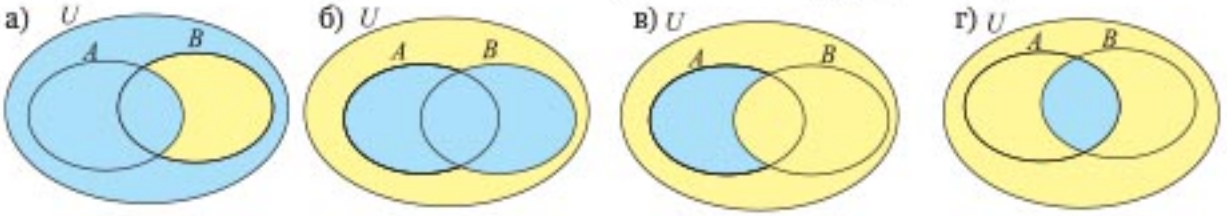
ЗАДАЧА 9

Од 400 ученици во едно училиште, 100 ученици консумираат сок од јагода, 150 ученици консумираат сок од јаболко, а 75 ученици консумираат сок од јагода и сок од јаболко. Колку ученици не консумираат ниту сок од јагода ниту сок од јаболко?
Користи го равенството $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Дадено е множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Најди го множеството:
а) $A \cap A$ б) $A \cap \emptyset$ в) $A \cup A$ г) $A \cup \emptyset$ д) $A \setminus A$ ѓ) $A \setminus \emptyset$ е) $\emptyset \setminus A$

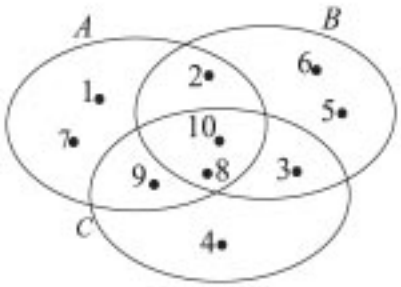
2. Запиши го множеството обоено со жолта боја на Веновиот дијаграм на цртеж 12.



Цртеж 12

3. Дадени се множествата $M = \{x \mid x$ е делител на 6$\}$, $P = \{x \mid x$ е содржател на 6 и $x < 20\}$ и $N = \{x \mid x$ е заеднички делител на 12 и 18$\}$. Запиши ги табеларно множествата:
а) $M \cap N$ б) $M \cup P$ в) $N \setminus P$ г) $M \setminus (N \cap P)$ д) $M \setminus (N \cup P)$

4. Според Веновиот дијаграм на цртеж 13, запиши го табеларно множеството:
а) $A \cap B \cap C$ б) $A \cap B \cap C^c$
в) $A \cap B^c \cap C$ г) $A \cap B^c \cap C$
д) $A \cap (B \cup C)^c$ ѓ) $A^c \cap B \cap C$
е) $C \cap (A \cup B)^c$ ж) $B \cap (A \cup C)^c$



Цртеж 13

5. Запиши го комплементот на множеството, ако универзалното множество е множеството природни броеви:
а) $\{x \mid x$ е прост број$\}$ б) $\{x \mid x$ е делив со 3 и со 5$\}$
в) $\{x \mid x$ е полн квадрат$\}$ г) $\{x \mid x + 5 = 8\}$
д) $\{x \mid x \geq 5\}$ ѓ) $\{x \mid 2x + 1 \geq 9\}$

6. Најди ја вредноста на x, ако:
а) $\{-4, 1, 0\} \cap \{-5, x, 1, 11\} = \{0, 1\}$ б) $\{5, x, -7\} \cap \{-5, 2, 4, 5, -7, 18\} = \{2, 5, -7\}$

7. Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ и $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
Најди го множеството:
а) $A \setminus B$ б) $B \setminus C$ в) $B \setminus A$ г) $(A \cup B) \setminus C$ д) $(C \setminus A) \cap B$ ѓ) $(A \cup B) \setminus (B \cup C)$
Потоа определи го кардиналниот број на секое од добиените множества.

8. Најди ги множествата A и B ако $A \cup B = \{$а, б, в, 4, 7, 9$\}$, $A \setminus B = \{4, $ б$\}$ и $B \setminus A = \{$в, 7$\}$.

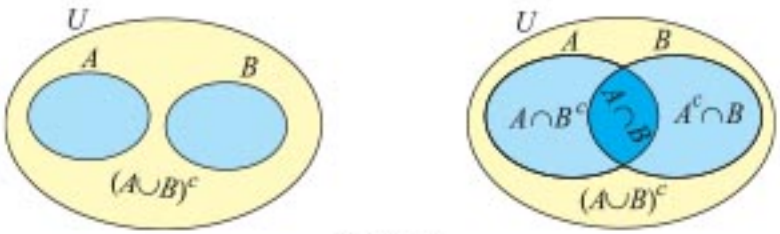
9. Во група ученици, 100 ученици зборуваат англиски, 50 ученици зборуваат германски и 25 ученици ги зборуваат двата јазици. Секој ученик зборува барем еден јазик.

Колку ученици има во групата?

10. Во едно училиште 70 ученици тренираат фудбал, 50 ученици тренираат кошарка, а 100 ученици тренираат барем еден од овие два спорта. Колку ученици тренираат фудбал и кошарка?

1.4. Решавање на проблеми со примена на множества

Нека се дадени универзално множество U и две негови подмножества A и B. Двете подмножества A и B ќе го разделат универзалното множество U на 3 или 4 дисјунктни подмножества, чија унија е универзалното множество, во зависност од тоа дали се дисјунктни или се сечат (цртеж 1).



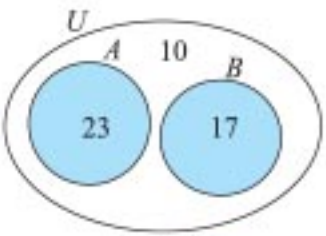
Цртеж 1

ПРИМЕР 1

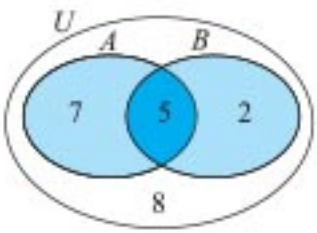
Дадени се универзално множество U и две негови подмножества A и B.

а) Според цртеж 2, на кој е прикажан Веновиот дијаграм на дисјунктни подмножества A и B имаме: $k(A) = 23$, $k(B) = 17$ и $k(A \cup B)^c = 10$.

Оттука наоѓаме дека, на пример, $k(A \cup B) = 23 + 17$ и $k(U) = 23 + 17 + 10 = 50$.



Цртеж 2



Цртеж 3

б) Според цртеж 3 на кој е прикажан Веновиот дијаграм на подмножества A и B кои се сечат: $k(A \cap B^c) = 7$, $k(A \cap B) = 5$, $k(B \cap A^c) = 2$ и $k(A \cup B)^c = 8$.

Оттука наоѓаме дека

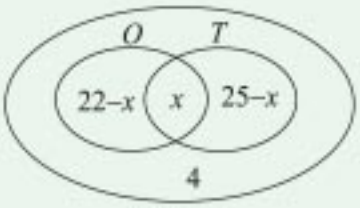
$k(A) = 7 + 5 = 12$, $k(B) = 2 + 5 = 7$, $k(A \cap B) = 5$,

$k(A \cup B) = 7 + 5 + 2 = 14$ и $k(U) = 7 + 5 + 2 + 8 = 22$.

ПРИМЕР 2

Во еден спортски клуб членуваат 35 девојчиња. Од нив 22 играат одбојка (O), 25 играат тенис (T), а 4 не играат ниту одбојка ниту тенис. Колку девојчиња играат одбојка и тенис?

Нека x е бројот на девојчиња кои играат одбојка и тенис (цртеж 4).



Цртеж 4

Вкупно 22 девојчиња играат одбојка, па бројот на девојчиња што играат одбојка, но не играат тенис е $22 - x$.

Вкупно 25 девојчиња играат тенис, па бројот на девојчиња што играат тенис, но не играат одбојка е $25 - x$.

Четири девојчиња не играат ниту одбојка ниту тенис.

Вкупниот број девојчиња во клубот е 35.

Ја составуваме равенката $(22 - x) + x + (25 - x) + 4 = 35$

чиешто решение е $x = 16$.

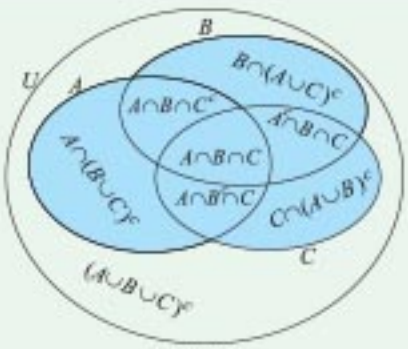
Бројот на девојчиња што играат одбојка и тенис е 16.

ЗАДАЧА 1

Рада и Петра служат супа и салата заедно со главното јадење на свадбена веселба. На свадбената веселба присуствувале вкупно 150 гости. Од нив 92 гости нарачале супа, 85 гости нарачале салата, додека 23 гости не нарачале ниту супа ниту салата. Колку гости нарачале супа и салата?

ПРИМЕР 3

Нека се дадени универзално множество U и три негови подмножества A, B и C, кои по парови се сечат. Тие го разделуваат универзалното множество на 8 дисјунктни подмножества чија унија е универзалното множество (цртеж 5).



Цртеж 5

ПРИМЕР 4

Според цртеж 6, на кој е прикажан Веновиот дијаграм на подмножества A, B и C, кои се сечат: $k(A \cap (B \cup C)^c) = 3$, $k(A \cap B \cap C^c) = 2$, $k(A \cap B^c \cap C) = 4$, $k(A \cap B \cap C) = 5$, $k(B \cap (A \cup C)^c) = 10$, $k(A^c \cap B \cap C) = 7$, $k(C \cap (A \cup B)^c) = 11$ и $k(A \cup B \cup C)^c = 1$.

Оттука наоѓаме дека, на пример,

$k(A) = 3 + 2 + 5 + 4 = 14$,

$k(B) = 10 + 2 + 5 + 7 = 24$,

$k(C) = 11 + 4 + 7 + 5 = 27$,

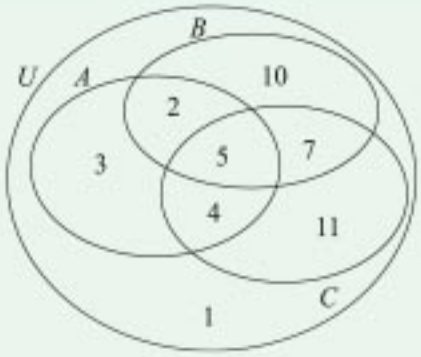
$k(A \cap B) = 2 + 5 = 7$,

$k(A \cap C) = 4 + 5 = 9$,

$k(B \cap C) = 5 + 7 = 12$,

$k(A \cup B \cup C) = 3 + 10 + 11 + 2 + 4 + 7 + 5 = 42$ и

$k(U) = 3 + 10 + 11 + 2 + 4 + 7 + 5 + 1 = 43$.



Цртеж 6

ПРИМЕР 5

Во еден спортски клуб членуваат 38 члена.
3 члена играат фудбал (F), кошарка (K) и тенис (T).
4 члена не играат ниту фудбал, ниту кошарка ниту тенис.
19 члена играат фудбал, 16 играат кошарка, а 12 играат тенис.
7 играат фудбал и кошарка, 4 играат кошарка и тенис.
а) Претстави со Венов дијаграм. б) Колку членови играат фудбал и тенис?

Нека x е бројот на членовите кои играат фудбал и тенис (цртеж 7). Според условот во задачата: 3 члена играат фудбал, кошарка и тенис.

$x - 3$ членови играат фудбал и тенис, но не играат кошарка.

$4 - 3 = 1$ член игра кошарка и тенис, но не играат фудбал.

$7 - 3 = 4$ члена играат кошарка и фудбал, но не игра тенис.

$16 - 1 - 3 - 4 = 8$ членови играат кошарка, но не играат ниту фудбал ниту тенис.

$19 - 4 - 3 - (x - 3) = 15 - x$ членови играат фудбал, но не играат ниту кошарка ниту тенис.

$12 - 1 - 3 - (x - 3) = 11 - x$ членови играат тенис, но не играат ниту фудбал ниту кошарка.

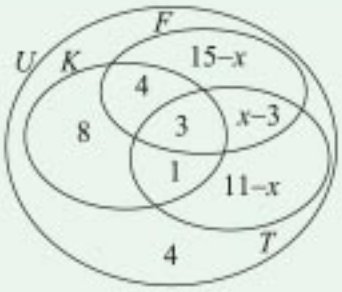
4 члена не играат ниту фудбал, ниту кошарка ниту тенис.

Според тоа, ја составуваме равенката

$8 + 1 + 4 + 3 + (x - 3) + (15 - x) + (11 - x) + 4 = 38$

чиешто решение е $x = 5$.

Бројот на членови кои играат фудбал и тенис е 5.



Цртеж 7

ПРИМЕР 6

Колку најмногу ученици учат во прва година во една гимназија ако:
47 ученици членуваат во кошаркарскиот клуб (K);
45 ученици членуваат во фудбалскиот клуб ($Ф$);
13 ученици членуваат во клубот за шах ($Ш$);

37 ученици членуваат во клубот за англиски јазик (A);
15 ученици членуваат во клубот за математика (M);
12 ученици се членови на кошаркарскиот и фудбалскиот клуб;
15 ученици се членови на кошаркарскиот клуб и клубот за англиски јазик;
17 ученици се членови на фудбалскиот клуб и клубот за англиски јазик;
10 ученици членуваат и во клубот за шах и во клубот за математика;
2 ученици членуваат во клубовите за фудбал, кошарка и англиски јазик;
5 ученици не членуваат во ниту еден клуб?

Нека x е бројот на ученици кои учат во прва година гимназија (цртеж 8).

Според условот во задачата:

$12 - 2 = 10$ ученици членуваат во кошаркарскиот и фудбалскиот клуб, но не членуваат во клубот за англиски јазик;

$17 - 2 = 15$ ученцци членуваат во фудбалскиот клуб и клубот за англиски јазик, но не членуваат во кошаркарскиот клуб;

$15 - 2 = 13$ ученици членуваат во кошаркарскиот клуб и клубот за англиски јазик, но не членуваат во фудбалскиот клуб;

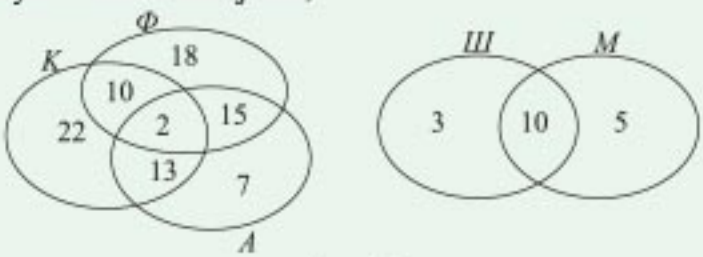
Така, добиваме дека:

$47 - 13 - 10 - 2 = 22$ ученици членуваат во кошаркарскиот клуб, но не членуваат во фудбалскиот клуб и клубот за англиски јазик;

$45 - 15 - 10 - 2 = 18$ ученици членуваат во фудбалскиот клуб, но не членуваат во кошаркарскиот клуб и клубот за англиски јазик;

$37 - 15 - 13 - 2 = 7$ ученици членуваат во клубот за англиски јазик, но не членуваат во фудбалскиот клуб и кошаркарскиот клуб;

$22 + 18 + 7 + 10 + 13 + 15 + 2 = 87$ ученици членуваат во фудбалскиот клуб или во кошаркарскиот клуб или во клубот за англиски јазик;



Цртеж 8

$15 - 10 = 5$ ученици членуваат во клубот за математика, а не членуваат во шаховскиот клуб;

$13 - 10 = 3$ ученици членуваат во шаховскиот клуб, а не членуваат во клубот за математика;

$3 + 5 + 10 = 18$ ученици членуваат во шаховскиот клуб или во клубот за математика;

Сакаме да го максимизираме вкупниот број на ученици, што значи треба да ги минимизираме пресеците на множествата (освен оние што се веќе дадени). Така, најголем број на ученици ќе имаме ако ниту еден од учениците кои членуваат во кошаркарскиот клуб или фудбалскиот клуб или клубот за англиски јазик не членува во клубот за математика или во шаховскиот клуб. Бидејќи 5 ученици не членуваат во ниту еден клуб, може да ја составиме неравенката $x \leq 87 + 18 + 5$ чие решение е $x \leq 110$.

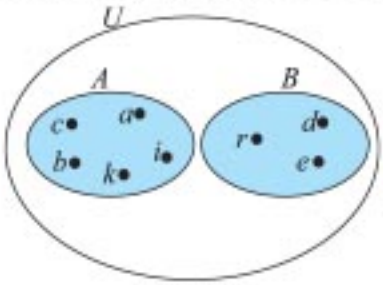
Најмногу 110 ученици учат во прва година во гимназијата.

ЗАДАЧА 2

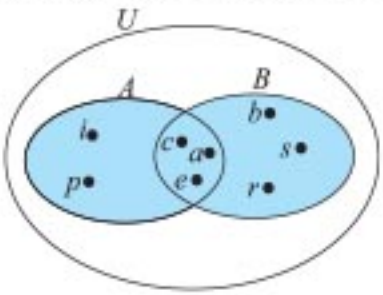
Група од 50 луѓе кои присуствуваа на конференција и кои однапред нарачаа ручек, можеа да изберат супа, салата или сендвич по нивни избор. Вкупно 17 луѓе избраа супа, 29 луѓе избраа салата, а 35 луѓе избраа сендвич. Од овие нарачки, 11 учесници избраа супа и салата, 10 учесници избраа супа и сендвич, а 18 избраа салата и сендвич. Колку учесници избраа супа, салата и сендвич?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Нека е дадено универзално множество $U = \{a, b, c, \ldots, z\}$.
   а) Според Веновиот дијаграм на цртеж 9 најди: $k(A)$, $k(B)$ и $k(A \cup B)$.
   б) Според Веновиот дијаграм на цртеж 10 најди: $k(A)$, $k(B)$, $k(A \cap B)$, $k(A \cup B)$ и $k(U)$.



Цртеж 9



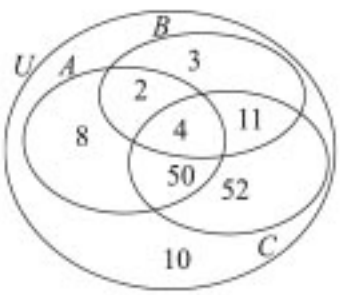
Цртеж 10

2. Давид служи торта и сладолед на неговата прослава за 15. роденден. На забавата има вкупно 54 гости. Да претпоставиме дека 30 гости добиле торта, 20 гости добиле сладолед, а 12 гости не добиле ниту торта ниту сладолед. Колку гости добиле торта и сладолед?

3. Од 50 туристи кои биле во посета на Хераклеја, 35 туристи зборуваат англиски, 20 туристи зборуваат германски, а 15 туристи ги зборуваат двата јазици. Колку туристи не зборуваат ниту еден од двата јазици?

4. Во едно училиште има 600 ученици. Од нив 150 ученици сакаат чај, 225 ученици сакаат лимонада, 100 ученици сакаат чај и лимонада?
   Колку ученици не сакаат ниту чај ниту лимонада?

5. Според Веновиот дијаграм на цртеж 11 најди:
   $k(A)$, $k(B)$, $k(C)$, $k(A \cap B)$, $k(A \cap C)$, $k(B \cap C)$, $k(A \cup B \cup C)$ и $k(U)$.



Цртеж 11

6. Ликовниот клуб во едно училиште спроведе анкета меѓу своите 42 члена и откри дека 23 од нив користеле мрсни боички, 28 користеле водени боички, а 17 користеле дрвени боички. Од нив, 10 членови на клубот ги користеле сите видови боички, 18 користеле мрсни боички и водени боички, 11 користеле водени боички и дрвени боички и 12 користеле мрсни боички и дрвени боички. Останатите членови на клубот не користеле ниту еден од трите видови боички.
   а) Колку членови на клубот користеле само мрсни боички?
   б) Колку членови на клубот не користеле ниту еден од три видови боички?

7. Во истражување спроведено на група од 60 испитаници, 25 испитаници го читале весникот А, 26 испитаници го читале весникот Б, 26 испитаници го читале весникот В, 9 ги читале весникот А и весникот В, 11 ги читале весникот А и весникот Б, 8 ги читале весникот Б и весникот В, а 3 испитаници ги читале сите три весници.

   а) Колку испитаници читале барем еден весник?

   б) Колку испитаници читале точно еден весник?

8. Во едно средно училиште, учениците посетуваат изборни курсеви по природни науки:

   50 ученици посетуваат курс по биологија (B);

   38 ученици посетуваат курс по хемија (H);

   36 ученици посетуваат курс по физика (F);

   20 ученици посетуваат курс по астрономија (A);

   18 ученици посетуваат курсеви по биологија и по хемија;

   15 ученици посетуваат курсеви по хемија и по физика;

   10 ученици посетуваат курсеви по биологија и по физика;

   5 ученици посетуваат курсеви по астрономија и по физика;

   6 ученици посетуваат три курса: биологија, хемија и физика;

   7 ученици не посетуваат ниту еден од овие курсеви.

   Колку најмногу ученици може да има во училиштето?

ИСТРАЖУВАЊЕ

Нека се дадени универзално множество U и четири негови подмножества A, B, C и D, кои се сечат по парови. Тие го разделуваат универзалното множество на дисјунктни подмножества, чија унија е универзалното множество.

а) На колку дисјунктни подмножества е разделено универзалното множество?

б) Запиши ги сите такви подмножества.

1.5. Декартов производ на множества

Подреден пар

АКТИВНОСТ

Рим се наоѓа на 42° географска ширина и на 12° географска должина. Џибути се наоѓа на 12° географска ширина и на 42° географска должина.

Дали со множествата {42°, 12°} и {12°, 42°} е наполно определена географската положба на Рим и Џибути?

ПРИМЕР 1

Множествата $\{1, 2\}$ и $\{2, 1\}$ се еднакви, односно $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, бидејќи редоследот на запишување на елементите од едно множество не е битен.

Во математиката и во секојдневниот живот понекогаш е значаен редоследот на елементите од едно множество (прв, втор, трет, ...). На пример, секој од нас прави разлика помеѓу левиот и десниот чевел, помеѓу левата и десната ракавица итн.

ПРИМЕР 2

Да ги разгледаме дропките $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{4}$. Тие иако се запишани со едни исти природни броеви 4 и 5, се разликуваат по редоследот на нивното запишување, читање и вредност. Во првата дропка бројот 4 е на прво место, во броителот, над дробната црта, а бројот 5 е на второ место, во именителот, под дробната црта. Во втората дропка пак бројот 4 е на второ место, а бројот 5 на прво место. Велиме дека тие дропки, а во општ случај и секоја дропка, претставува по еден подреден пар природни броеви.

ПРИМЕР 3

Да го свртиме нашето внимание на двоцифрените броеви 27 и 72. Тие, иако се запишани со едни исти цифри 2 и 7, се разликуваат по редоследот на запишувањето и читањето. Цифрата 2 во бројот 27 е на прво место и означува десетки, а во број 72 таа е на второ место и означува единици.

Затоа, велиме дека цифрите со кои се запишани двоцифрените броеви образуваат подредени парови од цифри, бидејќи при нивното запишување од посебно значење е која цифра е на прво место, а која на второ место.



За парот елементи a, b, ако елементот a е прогласен за прв, а елементот b за втор елемент велиме дека претставува **подреден пар** и симболички го означуваме со (a, b). Елементот a на подредениот пар (a, b) се вика **прва компонента**, а b се вика **втора компонента** на (a, b).

ПРИМЕР 4

Првата компонента на подредениот пар (4, 7) е бројот 4, а втора компонента е бројот 7.

ЗАДАЧА 1

Запиши подреден пар чија прва компонента е буквата M, а втора бројот 3.

Елементите на подредениот пар можат да бидат и еднакви (a, a), само што тогаш бесмислено е да се зборува за редослед на елементите.

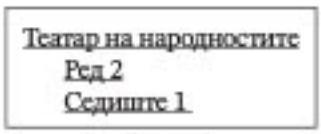
ЗАДАЧА 2

Запиши ги подредените парови од елементите на множеството $P = \{0, 1\}$. Колку подредени парови запиша? Колку подредени парови имаат еднаква прва и втора компонента?

ЗАДАЧА 3

Местата за седење во театар може да се означат со подредени парови броеви, од кои првиот го означува редот, а вториот седиштето (слика 1).

Дали подредените парови (1, 2) и (2, 1) се еднакви?



Слика 1

Два подредени парови (a, b) и (c, d) се еднакви ако и само ако $a = c$ и $b = d$. Во тој случај запишуваме $(a, b) = (c, d)$.

Според дефиницијата за еднаквост на два подредени пара, ако $a \neq b$ тогаш $(a, b) \neq (b, a)$.

ЗАДАЧА 4

Дали е точно равенството $(3, 4) = (4, 3)$? А равенството $\{3, 4\} = \{4, 3\}$?

ЗАДАЧА 5

Најди ги x и y за да важи равенството:

а) $(5, x) = (5, 3)$ б) $(12, y) = (x, 10)$ в) $(4 + x, 5) = (7, y + 2)$

Декартов производ на две множества

АКТИВНОСТ

Во училницата има 2 редици со по 3 клупи. Да ги групираме во множество од редици $R = \{\text{I}, \text{II}\}$ и множество од редни броеви на клупите $K = \{1, 2, 3\}$.

За секоја клупа запиши подреден пар, чија прва компонента ќе биде редицата, а втора редниот број на клупата. Запиши го табеларно множеството од добиените подредени парови.

ПРИМЕР 5

Нека се дадени множествата $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{x, y\}$. Да ги формираме сите подредени парови чии први компоненти се елементи на множеството A, а втори компоненти се елементи на множеството B. Тоа се подредените парови: $(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)$. Тие дефинираат ново множество, кое симболички го запишуваме:

$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$, а го викаме Декартов производ на множеството A и множеството B. Читаме: A по B.

Декартов производ на множество A и множество B се вика множеството $A \times B$ (читаме A по B), кое се состои сите подредени парови (x, y), чија прва компонента припаѓа на A, а втора на B, односно $A \times B = \{(x, y) | \ x \in A, y \in B\}$,

Ако барем едно од множествата A и B е празно множество, тогаш по дефиниција земаме дека и Декартовиот производ е празно множество: $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times B = \emptyset$ и $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

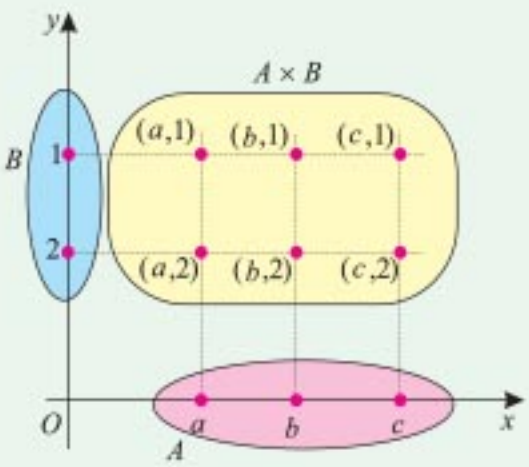
ПРИМЕР 6

Ако е $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2\}$, тогаш
$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$, а $B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

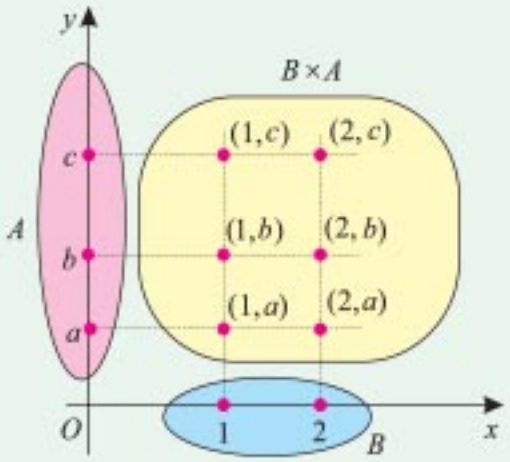
Како што забележуваме $A \times B \neq B \times A$. Според тоа, операцијата Декартов производ не е комутативна.

Подредените парови (a, b), кои се елементи на Декартов производ на две множества A и B, може да се разгледуваат како координати на точки во координатната рамнина, со апсциса a и ордината b. Така, на секој подреден пар соодветствува точно една точка од координатната рамнина. Затоа, подредените парови често ги викаме „точки во рамнината“ или само „точки“.

На цртеж 1 и цртеж 2 дадена е **Декартова шема** за геометриска илустрација на множествата $A \times B$ и $B \times A$.



Цртеж 1



Цртеж 2

ЗАДАЧА 6

Запиши ги табеларно множествата чијшто Декартов производ е

а) $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$ б) $C \times D = \{(2, 5), (9, 5), (2, 7), (9, 3), (2, 3), (9, 7)\}$

ПРИМЕР 7

Декартовиот производ на множеството $A = \{x, y\}$, самото со себе, е $A \times A = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$. Множеството $A \times A$ често го викаме Декартов квадрат на множеството A и го означуваме со A^2. Читаме A на квадрат.

Декартов квадрат на множество A се вика множеството $A^2 = A \times A$, кое се состои од сите подредени парови (x, y) од елементите на множеството A, односно

$A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in A\}$

Подмножеството D на множеството A^2 кое се состои од елементите (x, x), каде што $x \in A$, се вика **дијагонала** на множеството A. Запишуваме

$D(A) = \{(x, x) \mid x \in A\}$.

ПРИМЕР 8

Нека $A = \{a, b, c\}$, тогаш за Декартовиот квадрат и за дијагоналата на A имаме
$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$, $D(A) = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$.

ЗАДАЧА 7

Запиши го Декартовиот квадрат на множеството $K = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 3 < x < 6\}$.

АКТИВНОСТ

Дадени се множествата $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 3\}$ и $C = \{1, 2, 3\}$. Дали се точни равенствата:

а) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ и $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

б) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ и $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

в) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ и $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

Што забележуваш?

За кои било конечни множества A, B и C важат равенствата:

а)	$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$	дистрибутивен закон на Декартовиот
	$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$	производ во однос на пресекот;
б)	$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$	дистрибутивен закон на Декартовиот
	$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$	производ во однос на унијата;
в)	$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$	дистрибутивен закон на Декартовиот
	$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$	производ во однос на разликата.

ПРИМЕР 9

Дадени се множествата $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{a, b\}$. Да го определиме бројот на елементи на множеството $A \times B$.

Имаме дека $k(A) = 3$ и $k(B) = 2$.

$(2, a), (2, b)$	Сите подредени парови со прва компонента 2.
$(4, a), (4, b)$	Сите подредени парови со прва компонента 4.

$(6, a), (6, b)$ Сите подредени парови со прва компонента 6.
$n(A \times B) = k(B) + k(B) + k(B) = k(A) \cdot k(B) = 3 \cdot 2 = 6.$



За кои било конечни множества A и B важи равенството $k(A \times B) = k(A) \cdot k(B)$.

ЗАДАЧА 8

Најди го бројот на елементи на Декартовиот квадрат на множеството $M = \{a, b, c\}$.

ЗАДАЧА 9

Еден ученик програмира Arduino уред за мерење во различни услови. Достапни му се три вида сензори $S = \{$температурен, звучен, светлосен$\}$, и две различни програми што може да ги поврзе со сензор $M = \{$програма A, програма $B\}$.

а) Запиши го Декартовиот производ $S \times M$. Што претставува секој подреден пар?

б) Колку различни можности има за поврзување на сензор со програма?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Запиши ги сите подредени парови чија прва компонента е најмалиот прост број, а втората е прост број помал од 10.

2. Запиши ги сите подредени парови природни броеви (a, b) такви што:
   а) $a + b = 6$ б) $a \cdot b = 6$

3. Најди ги x и y за да важи равенството:
   а) $(x + 2, y - 3) = (8, 2)$ б) $(4 \cdot x, 3) = (12, y - 2)$
   в) $(x, x + 1) = (y + 2, 3)$ г) $(x, 2y) = (y - 1, 10)$

4. Дадени се множествата $M = \{a, b, c\}$ и $N = \{a, b\}$. Запиши го Декартовиот производ на множествата и нацртај ја Декартовата шема на производот:
   а) $M \times N$ б) $N \times M$

5. Претстави ги табеларно множествата чиј Декартов производ е:
   а) $A \times B = \{(1,1), (2,1), (3,1), (1,3), (2,3), (3,3)\}$,
   б) $M \times N = \{(m,1), (n,1), (p,1), (m,3), (n,3), (p,3), (m,5), (n,5), (p,5)\}$.

6. Запиши го Декартовиот квадрат на множеството:
   а) $S = \{2, 4, 6\}$, б) $P = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $6 < x < 9\}$.

7. Запиши ги квадратот и дијагоналата на множеството $M = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $1 < x < 5\}$.
   Потоа определи ги множествата:
   а) $M^2 \setminus D(M)$ б) $M^2 \cup D(M)$ в) $(M^2 \cap D(M)) \setminus D(M))$ г) $(M^2 \setminus D(M)) \cap D(M))$

8. Дадени се множествата:
$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 2 < x < 6\}, B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 3 \leq x < 7\}$ и $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } 4 < x \leq 8\}$.
Запиши ги множествата: а) $(B \setminus A) \times C$ б) $(B \cap C) \times A$

9. Во лабораторија, ученици вршат испитување на растенија со помош на различни светлосни услови и типови ѓубрива. Достапни се видовите светлина:
$L = \{$црвена светлина, сина светлина, бела светлина$\}$ и видовите ѓубриво
$G = \{$органско, минерално$\}$.
а) Запиши го Декартовиот производ $L \times G$.
б) Ако секој експеримент трае 3 дена, колку дена ќе требаат за да се завршат сите експерименти ако се прават еден по еден?

1.6. Природни броеви

Подредување во множеството природни броеви

Основно множество на броеви е множеството **природни броеви** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.
Множеството $\mathbb{N} \cup \{0\}$ го означуваме со $\mathbb{N}_0$ и го нарекуваме **проширено множество природни броеви** $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.

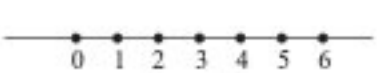
За секои два елементи $m, n \in \mathbb{N}_0$, точно е едно и само едно од следниве тврдења: или $m = n$, или $m + c = n$, за некој $c \in \mathbb{N}$, или $m = n + d$ за некој $d \in \mathbb{N}$.
Во вториот случај велиме дека m **е помал од** n и пишуваме $m < n$, а во третиот случај велиме дека m **е поголем од** n и пишуваме $m > n$. Според тоа, природните броеви може да се подредат на следниот начин: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots < n < n + 1 < \ldots$

Бројот $n + 1$ е **следбеник** на бројот n, а бројот n е **претходник** на бројот $n + 1$.
Секој природен број има единствен следбеник, бројот 0 нема претходник, а секој друг природен број има единствен претходник.

Корисен и прегледен начин за претставување на множеството $\mathbb{N}_0$ е **бројната полуправа**.
На права p избираме две точки O и E, кои ја определуваат полуправата со почеток во O.
Со нанесување на отсечката OE надесно добиваме бесконечно многу точки (цртеж 1).
На точката O го придружуваме бројот 0, на точката E бројот 1, на наредната точка надесно го придружуваме бројот 2, итн. Ако на точката A го придружиме бројот n, тогаш на наредната точка надесно го придружуваме неговиот следбеник $n + 1$.



Цртеж 1



Цртеж 2

На овој начин, на секој природен број придружуваме точки од полуправата OE (цртеж 2).
Бројната полуправа може да ни послужи за споредување на елементите од множеството $\mathbb{N}_0$.
Во таа смисла, $m < n$ ако точката на која е придружен бројот m е лево од точката на која е придружен бројот n.

ЗАДАЧА 1

Спореди ги природните броеви: а) 1 и 6 б) 8 и 4 в) 16 и 22 г) 0 и 32

Операции во множеството природни броеви

АКТИВНОСТ

а) Ана има 8 сини боички и 7 црвени боички. Колку вкупно боички има Ана?

б) Ако A и B се две конечни дисјунктни множества такви што $k(A) = a$ и $k(B) = b$, колку е $k(A \cup B)$?

Нека A и B се две конечни дисјунктни множества такви што $k(A) = a$ и $k(B) = b$. **Збирот** на природните броеви a и b е природниот број c таков што $c = k(A \cup B)$. Запишуваме $a + b = c$.

Броевите a и b се викаат **собироци**, а извршената операција **собирање**.

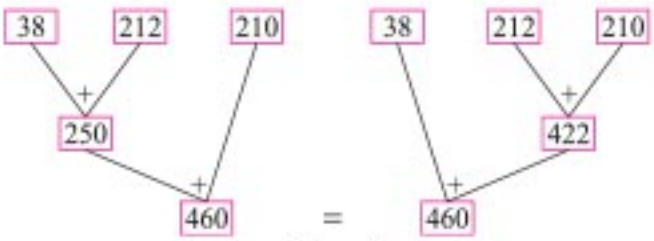
За собирањето на природни броеви важат следните својства (закони):

а) ако $a, b \in \mathbb{N}$, тогаш и $a + b \in \mathbb{N}$	Закон за затвореност на собирањето
б) $a + b = b + a$, за секои $a, b \in \mathbb{N}$	Комутативен закон на собирањето
в) $(a + b) + c = a + (b + c)$, за секои $a, b, c \in \mathbb{N}$	Асоцијативен закон на собирањето

Комутативниот закон означува дека збирот не зависи од редоследот на собироците, на пример $12 + 7 = 19$ и $7 + 12 = 19$.

Асоцијативниот закон означува дека збирот не зависи од начинот на групирање на собироците, што може да се забележи на цртеж 3.

Според тоа, збирот од три и повеќе собироци секогаш може да го запишеме без загради.



Цртеж 3

ПРИМЕР 1

Пресметај го збирот на природните броеви на наједноставен начин:
а) $147 + 33 + 17 + 503$ б) $1 + 2 + 3 + \ldots + 19$

а) $147 + 33 + 17 + 503 = (147 + 33) + (17 + 503) = 180 + 520 = 700$

б) $1 + 2 + 3 + \ldots + 19 = (1 + 19) + (2 + 18) + \ldots + (9 + 11) + 10 = 9 \cdot 20 + 10 = 190$

Производот на двата природни броја a и b се нарекува збирот на a собироци, од кои секој е еднаков на b и се означува со ab, односно $\underbrace{b+b+\ldots+b}_{a\text{–собироци}}=ab$

Броевите a и b се викаат множители, а извршената операција **множење**.

ЗАДАЧА 2

Провери ја точноста на равенствата:

а) $8\cdot 9=9\cdot 8$ б) $(7\cdot 4)\cdot 5=7\cdot(4\cdot 5)$

в) $4\cdot(3+8)=4\cdot 3+4\cdot 8$ г) $(3+8)\cdot 4=3\cdot 4+8\cdot 4$

За множењето на природни броеви важат следните својства (закони):

а) ако $a, b\in\mathbb{N}$, тогаш и $a\cdot b\in\mathbb{N}$	Закон за затвореност на множењето
б) $a\cdot b=b\cdot a$, за секои $a, b\in\mathbb{N}$	Комутативен закон на множењето
в) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$, за секои $a, b, c\in\mathbb{N}$	Асоцијативен закон на множењето
г) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, и $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$, за секои $a, b, c\in\mathbb{N}$	Дистрибутивен закон на множењето во однос на собирањето

АКТИВНОСТ

Објасни ја постапката за пресметување на непознатиот собирок во равенката $5+x=9$.

Разликата на природниот број a со природниот број b се нарекува природниот број c, кој собран со бројот b го дава бројот a. Запишуваме $a-b=c$, ако $a=c+b$.
Бројот a се нарекува **намаленик**, бројот b се вика **намалител**, а извршената операција **одземање**.

ПРИМЕР 2

Запиши ги табеларно множествата $A=\{x\mid x\in\mathbb{N}\text{ и }3<x<26\}$ и $B=\{x\mid x\in\mathbb{N}\text{ и }2<x<8\}$, а потоа најди го множеството $C=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\text{ и }a-7=b\}$

$A=\{4, 5,\ldots,25\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$ и $C=\{(10, 3), (11, 4), (12, 5), (13, 6), (14, 7)\}$.

ПРИМЕР 3

а) За операцијата одземање во множеството природни броеви не важи **законот за затвореност**. Така, на пример, $2-3$ не е природен број, бидејќи не постои природен број кој собран со бројот 3 ќе го даде бројот 2.

б) За операцијата одземање во множеството природни броеви не важат **комутативниот и асоцијативниот закон**. Така, на пример,
$15 - 8$ е природен број, додека $8 - 15$ не е природен број;
$15 - (8 - 3) \neq (15 - 8) - 3$.

ЗАДАЧА 3

Провери ја точноста на равенствата:

а) $7 \cdot (6 - 2) = 7 \cdot 6 - 7 \cdot 2$ б) $(6 - 2) \cdot 7 = 6 \cdot 7 - 2 \cdot 7$



Ако a и b се природни броеви такви што $a - b \in \mathbb{N}$, тогаш важи
$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c = c \cdot (a - b)$, за секој $c \in \mathbb{N}$ Дистрибутивен закон на множењето во однос на одземањето

Собирањето и множењето на природните броеви може да се прошири на множеството $\mathbb{N}_0$ со:
$a + 0 = 0 + a = a$ и $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, за секој $a \in \mathbb{N}_0$.

АКТИВНОСТ

Објасни ја постапката за пресметување на непознатиот множител во равенката $x \cdot 32 = 384$.



Количникот на природниот број a со природниот број b се нарекува природниот број c, кој помножен со бројот b го дава бројот a. Запишуваме $a : b = c$, ако $a = b \cdot c$.

Бројот a се нарекува **деленик**, бројот b се викаат **делител**, а извршената операција **делење**.

ПРИМЕР 4

За операцијата делење во множеството природни броеви не важи **законот за затвореност**, односно постојат $a, b \in \mathbb{N}$ такви што $a : b \notin \mathbb{N}$. Така, на пример, $2 : 3$ не е природен број, бидејќи не постои природен број кој помножен со бројот 3 ќе го даде бројот 2.

ЗАДАЧА 4

Провери ја точноста на равенствата:

в) $(6 + 2) : 2 = 6 : 2 + 2 : 2$ г) $(6 - 2) : 2 = 6 : 2 - 2 : 2$



Ако a и b се природни броеви такви што $a : c, b : c, (a - b) : c \in \mathbb{N}$, тогаш важи
$(a + b) : c = a : c + b : c$, и Десен дистрибутивен закон на делењето
$(a - b) : c = a : c - b : c$, за секои $a, b, c \in \mathbb{N}$ во однос на собирањето и одземањето

ЗАДАЧА 5

Еден тест содржи 15 задачи. За секоја точно решена задача се даваат 4 поени, а за секоја неточно решена се одземаат 2 поени. Маја, Марко и Илир ги решиле сите задачи.

а) Колку поени добила Маја, ако точно решила само 9 задачи?

б) Колку поени има Марко кој точно решил само 5 задачи?

в) Колку задачи погрешно решил Илир, ако тој освоил 48 поени?

Деливост во $\mathbb{N}_0$

АКТИВНОСТ

Колку е: а) $246 : 6$ б) $182 : 9$?

Сигурно доби дека $246 : 6 = 41$.

Понатаму доби дека 182 не може да се подели со 9, бидејќи не постои природен број кој помножен со 9 ќе го даде бројот 182. Од друга страна, $182 = 9 \cdot 20 + 2$.



Природниот број b е **делител** на природниот број a, ако и само ако постои природен број c таков што $a = b \cdot c$. За бројот a велиме дека е **делив** со бројот b. Означуваме $b \mid a$.

ПРИМЕР 5

Бројот 4 е делител на бројот 28, односно бројот 28 е делив со бројот 4, бидејќи $28 = 4 \cdot 7$ и запишуваме $4 \mid 28$.

Бројот 4 не е делител на бројот 30, бидејќи не постои природен број кој помножен со 4 ќе го даде бројот 30.



Според признаците за деливост, природен број е делив:

а) со 2 ако и само ако завршува на парна цифра;
б) со 3 ако и само ако збирот на неговите цифри е број делив со 3;
в) со 4 ако и само ако двоцифрениот завршеток е број делив со 4 или завршува на 00;
г) со 5 ако и само ако завршува на 0 или 5;
д) со 9 ако и само ако збирот на неговите цифри е број делив со 9;
ѓ) со 10 ако и само ако завршува на 0.

ПРИМЕР 6

Со помош на признаците за деливост може да утврдиме дека:

а) бројот 56 е делив со 2, бидејќи завршува на парна цифра;
б) бројот 96 е делив со 3, бидејќи збирот на неговите цифри е број делив со 3;

в) броевите 524 и 200 се деливи со 4. Бројот 524 има двоцифрен завршеток делив со 4, а бројот 200 двоцифрениот завршеток 00;

г) броевите 45 и 270 се деливи со 5. Бројот 45 завршува на цифрата 5, а бројот 270 завршува со цифрата 0;

д) бројот 620 е делив со 10, бидејќи завршува на 0.

Бидејќи делењето не е затворена операција во $\mathbb{N}$, воведуваме делење со **остаток**.

За секои $a, b \in \mathbb{N}$, постојат единствени броеви $p, q \in \mathbb{N}_0$ такви што $a = bp + q$ и $0 \leq q < b$.

Бројот p се нарекува **количник**, а бројот q се нарекува **остаток** при делењето на **деленикот** a со **делителот** b. Ако $q = 0$ делењето со остаток, што всушност е делење, се нарекува делење **без остаток**.

ПРИМЕР 7

Секој природен број при делење со 2 може да има остаток 0 или 1.

Парните броевите имаат остаток 0 при делење со 2, а непарните броеви имаат остаток 1 при делење со 2. Од тие причини, парните броеви може да ги запишеме во облик $2n$, $n \in \mathbb{N}$, а непарните броеви во облик $2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕР 8

Секој природен број при делење со 5 може да има остаток 0, 1, 2, 3 или 4. Според тоа секој природен број може да се запише во облик $5n$, $5n + 1$, $5n + 2$, $5n + 3$ и $5n + 4$, за $n \in \mathbb{N}_0$.

Природен број поголем од 1, кој е делив само со 1 и со самиот себе се вика **прост** број. Природните броеви поголеми од 1 кои не се прости се викаат **сложени броеви**.

Од дефиницијата непосредно заклучуваме дека секој прост број има точно два делители, а секој сложен број има повеќе од два делители.

ПРИМЕР 9

Бројот 11 е прост број, бидејќи негови делители се само 1 и 11, додека бројот 10 е сложен број затоа што негови делители се 1, 2, 5 и 10. Бројот 1 не е ниту прост ниту сложен број.

Секој сложен број може да се претстави како производ од прости броеви.

Претставувањето на број во вид на производ од прости броеви се вика **разложување на бројот на прости множители**.

ПРИМЕР 10

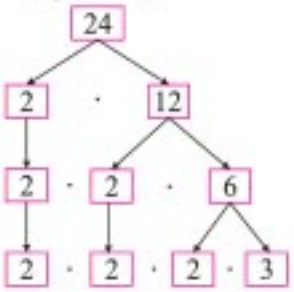
Бројот 24 е разложен на прости множители:

а) со вертикална таблица

24:2=12	24 | 2
12:2=6	12 | 2
6:2=3	6 | 2
3:3=1	3 | 3
	1

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$

б) со дрво на делители.



ЗАДАЧА 6

Со вертикална таблица разложи го на прости множители бројот: а) 60 б) 120 в) 153 г) 425

ПРИМЕР 11

Разложи го на прости множители бројот 167.

Според признаците за деливост утврдуваме дека бројот 167 не е делив со 2, 3 и 5. Наредните прости броеви се 7 и 11, па со проверка утврдуваме дека 167 не е делив со ниту со еден од нив. Бидејќи $167 < 169 = 13 \cdot 13$, следува дека 167 не може да има делители поголеми од 13, бидејќи тогаш би имал и прост делител помал од 13, а таков нема, па тој е прост број. Според тоа, $167 = 1 \cdot 167$.



Ако природниот број p не е делив со ниту еден прост број чиј квадрат не е поголем од p, тогаш бројот p е прост број.

ПРИМЕР 12

Дадени се броевите 8, 12 и 20.

а) Најди ги сите делители на секој од броевите. б) Најди ги сите нивни заедничките делители.

Множествата делители се: $D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$, $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ и $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

б) Множеството заеднички делители е пресекот $D_8 \cap D_{12} \cap D_{20} = \{1, 2, 4\}$.



Заеднички делител на два или повеќе природни броја, е секој природен број со кој е делив секој од дадените броеви.

Најголемиот број меѓу заедничките делители на два или повеќе природни броеви се нарекува **најголем заеднички делител на броевите** (НЗД).

ЗАДАЧА 7

Најди ги сите заеднички делители на броевите 45, 75 и 165.

ПРИМЕР 13

Најди го НЗД(90, 135, 315).
За да го одредиме најголемиот заеднички делител на два или повеќе броеви потребно е броевите да ги разложиме на прости множители. Разложувањето да го извршиме истовремено со една вертикална таблица.
НЗД(90, 135, 315) = 3 · 3 · 5 = 45

90,	135,	315	3
30,	45,	105	3
10,	15,	35	5
2,	3,	7	

Сигурно забележа дека најголемиот број меѓу заедничките делители на два или повеќе броеви е еднаков на производот од степените на нивните заеднички прости множители, при што за показател на секој прост множител го земаме најмалиот од показателите.

ЗАДАЧА 8

Најди НЗД на броевите: а) 24 и 30 б) 30, 105 и 210 в) 9 и 16

Ако за броевите a и b важи НЗД$(a, b) = 1$, тогаш велиме дека a и b се **заемно прости броеви**.

ЗАДАЧА 9

Инженер има два електрични кабли, еден долг 36 метри, а друг долг 60 метри. Колкава е најголемата должина со која дадените кабли може да се поделат на еднакви делови?

ПРИМЕР 14

Дадени се броевите 5 и 15.
а) Најди го множеството содржатели на секој од броевите.
б) Најди го множеството на нивните заеднички содржатели.

а) Множествата содржатели се:
$S_5 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...\}$ и $S_{15} = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, ...\}$.
б) Множеството заеднички содржатели е пресекот $S_5 \cap S_{15} = \{15, 30, 45, 60, ...\}$.

Природниот број a го нарекуваме **содржател** на природниот број b, ако b е делител на a, односно $b \mid a$.

Заеднички содржател на два или повеќе природни броја е секој природен број кој е делив со секој од броевите. Најмалиот број меѓу заедничките содржатели се нарекува **најмал заеднички содржател на броевите** (НЗС).

ЗАДАЧА 10

Најди ги сите заеднички содржатели на броевите 60, 72 и 90.

ПРИМЕР 15

За да го одредиме најголемиот заеднички делител на два или повеќе броеви, потребно е броевите да ги разложиме на прости множители. Разложувањето да го извршиме истовремено со една вертикална таблица.

54,	120,	140,	450,	2
27,	60,	70,	225	2
27,	30,	35,	225	2
27,	15,	35,	225	3
9,	5,	35,	75	3
3,	5,	35,	25	3
1,	5,	35,	25	5
	1,	7,	5	5
		7,	1	7
		1,		

$НЗС(54, 120, 140, 450) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$

$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 37\,800$

Сигурно забележа дека најмалиот број меѓу заедничките содржатели на два или повеќе броеви е еднаков на производот од степените на нивните заеднички прости множители, при што за показател на секој прост множител го земаме најголемиот од показателите.

ЗАДАЧА 11

Најди НЗС на броевите: а) 6 и 12 б) 15 и 16 в) 9 и 16

Сигурно воочи дека најмалиот заеднички содржател на два или повеќе заемно прости броеви е нивниот производ. Освен тоа, ако бројот a е содржател на бројот b, тогаш $НЗС(a, b) = a$.

ЗАДАЧА 12

По должината на патот од градот A до градот B се поставени столбови на секои 35 метри еден од друг. Столбовите се разместени на растојание 50 метри еден од друг. На какво најмало растојание од градот A стар столб нема да биде разместен?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Дали е точно тврдењето:
   а) бројот 5 е претходник на бројот 12 б) бројот 18 е следбеник на бројот 6
   в) бројот 30 е претходник на бројот 29 г) бројот 5 е следбеник на 4

2. Изврши ги назначените операции на наједноставен начин:
   а) $234 + 457 + 146 + 473$ б) $13 + 47 + 28 + 62 + 91 + 89$
   в) $1 + 2 + \ldots + 50$ г) $125 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4$

3. Која цифра треба да стои на местото на * во бројот:
   а) 23 * 469, за тој да е делив со 3 б) 113*, за тој да е делив со 4?

4. Во една корпа има помалку од 100 лимони. Тие може да се распоредат подеднакво во 2, 3 или 5 помали корпи, но не може да се распоредат подеднакво во 4 корпи. Колку лимони има во корпата?

5. Пресметај го делителот ако деленикот е 170 и остатокот е 11.

6. Разложи го на прости множители бројот: а) 96 б) 120 в) 231

7. Најди ги заедничките делители на броевите:
а) 24 и 36 б) 15 и 18 в) 240 и 360 г) 30, 70 и 105
Потоа најди го нивниот најголем заеднички делител.

8. Мала фабрика за печива произведува во една тура 420 переци и 130 соленки. Таа ги пакува во кутии во поедначков број на переци и соленки. Колку переци, а колку соленки, ќе има најмногу во секоја кутија?

9. Најди го најмалиот заеднички содржател на броевите:
а) 6, 10, 12 и 15 б) 12, 75, 100 и 240 в) 525 и 625

10. Во цвећарницата има повеќе од 100, а помалку од 250 ружи. Се продаваат букети кои се состојат од 3, 5 или 7 ружи. Колку ружи има во цвећарницата ако при правењето букети не останала ниту една ружа?

11. Марко секој трет ден оди на пливање, секој четврти ден го изучува кинескиот јазик и секој четиринаесетти ден вози велосипед. Ако денес Марко ги има сите три активности, одреди за колку денови повторно ќе ги има сите три активности во ист ден.

12. Јужниот Пол истовремено го надлетуваат 3 сателити. Првиот ја заобиколува Земјата за 90 минути, вториот за 105 минути, а третиот за 120 минути. Колку пати првиот сателит ќе ја заобиколи Земјата до моментот кога сите три сателити повторно ќе се најдат над Јужниот Пол?

ИСТРАЖУВАЊЕ

Постапката за утврдување на простите броеви од една конечна низа на природни броеви е позната е под името Ератостеново сито.

Бројот 1 не е ниту прост ниту сложен, се прецртува.

Бројот 2 е прост број, по него се прецртува секој парен број.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~

Бројот 3 е прост број, по него се прецртува секој трет број (број делив со 3).

Постапката се продолжува за секој наредeн непрецртан прост број.

Со помош на погорната постапка најди ги сите прости броеви до 100.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Алмир замислил еден број кој е помал од 150. Ако тој број го поделиш со 2 ќе добиеш остаток 1, ако го поделиш со 3 ќе добиеш остаток 2, ако го поделиш со 4 ќе добиеш остаток 3, ако го поделиш со 5 ќе добиеш остаток 4, ако го поделиш со 6 ќе добиеш остаток 5, ако го поделиш со 7 ќе добиеш остаток 0.

Истражи и откриј го бројот што го замислил Алмир.

1.7. Цели броеви и операции со цели броеви

Цели броеви

Операцијата одземање не е секогаш изводлива во множеството природни броеви. Така, на пример, разликата 5 – 7 не е природен број. Исто така, во практиката се среќаваме со појави кои математички не можат да се опишат со природните броеви.

АКТИВНОСТ

а) Живата на термометарот во Скопје покажува 10 °C под нулата.

б) Мирко сакал да купи подарок од 600 денари, но кај себе имал само 500 денари. Мирко позајмил 100 денари од своите родители и го купил подарокот.

Во тој момент Мирко немал ниту еден денар и уште повеќе тој им должел 100 денари на родителите. Дали можеш да ја искажеш температурата во Скопје, како и финансиската состојбата на Мирко со природните броеви? Со кои броеви ќе го направиш тоа?

За надминување на проблемот со одземањето во множеството на природните броеви, како математичкото опишување на некои појави, множеството $\mathbb{N}_0$ го прошируваме до ново множество, наречено множество на **цели броеви**.

На бројната права десно од нулата ги нанесуваме природните броеви 1, 2, 3,... Таа насока ќе ја сметаме за **позитивна насока**, а броевите нанесени во таа насока ќе ги **викаме позитивни цели броеви** (цртеж 1). За нив велиме дека имаат позитивен предзнак (+).



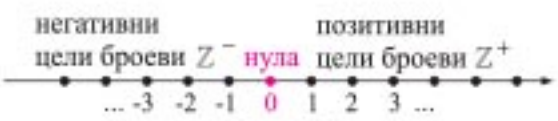
Цртеж 1



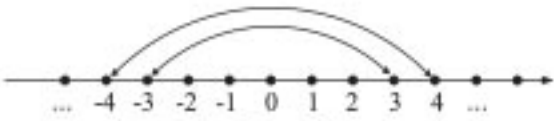
Цртеж 2

Спротивната насока на бројната права се вика **негативна насока**. Во таа насока, со нанесување на еднакви должини, ги нанесуваме **негативните цели броеви** –1, –2, –3,... (цртеж 2). За нив велиме дека имаат негативен предзнак (–).

Бројот 0 не е ниту позитивен ниту негативен цел број. Тој ги разделува позитивните броеви од негативните цели броеви (цртеж 3).



Цртеж 3



Цртеж 4

Множеството од сите негативни цели броеви $\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1\}$, бројот 0 (нула) и сите позитивни цели броеви $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$, го образуваат **множеството на цели броеви** кое го означуваме со $\mathbb{Z}$, односно $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.

Секој елемент на множеството $\mathbb{Z}$ се вика **цел број**.

ЗАДАЧА 1

Годините пред Христовото раѓање се бројат како „1 година пр.н.е", „2 година пр.н.е" итн. Годините, пред нашата ера може да ги запишеме со негативните цели броеви, а годините од нашата ера со позитивните цели броеви.

Нацртај бројна права и означи го бројот кој одговара на:

а) 2 години пред Христовото раѓање

б) годината на раѓање на математичарите: Архимед 287 година пр.н.е, Питагора 570 година пр.н.е, Рене Декарт 1596 година и Леонард Ојлер 1707 година.

ПРИМЕР 1

На бројна права прикажи ги точките: -3, 3, -4 и 4. Што забележуваш?

Броевите -3 и 3, како и броевите -4 и 4, се симетрично распоредени во однос на нулата.

Таквите броеви ги викаме **спротивни броеви**.

За секој цел број a постои единствен број b, така што броевите a и b се спротивни:

а) ако $a = c$, тогаш $b = -c$;

б) ако $a = -c$, тогаш $b = c$;

в) ако $a = 0$, тогаш $b = 0$.

Единствено целиот број 0 е спротивен сам на себе.

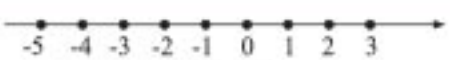
$-(a) = -a$
$-(-a) = a$
$-0 = 0$

ЗАДАЧА 2

Запиши го спротивниот број на секој од броевите: 9, 0, $-(+3)$, $-(-7)$.

ПРИМЕР 2

Точката која е придружена на бројот 3 е оддалечена за 3 единици од нулата, а точката која е придружена на бројот -5 е оддалечена за 5 единици од нулата (цртеж 5).



Цртеж 5

За секој цел број може да кажеме колку е оддалечен од бројот 0.

Растојанието на секој цел број a од 0 на бројната права се вика **апсолутна вредност** на целиот број a и се означува со $|a|$.

Согласно дефиницијата и согледувањата од претходниот пример може да запишеме

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}.$$

ЗАДАЧА 3

Пресметај: а) $|-3+5|+|-2\cdot(-3)-11|$ б) $|-x-2|+|3-x|-|5-x|$, за $x=-20$

При **споредување** на целите броеви важи истото правило како и кај природните броеви, односно цел број a е помал од цел број b ако и само ако на бројната оска бројот a се наоѓа лево од бројот b и пишуваме $a < b$.
Целите броеви може да се подредат по големина на следниов начин:
$\ldots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 \ldots$

ЗАДАЧА 4

Претстави ги на бројната оска броевите: 0, 2, 3, –7, 9, –8, –2, –10 и –1. Потоа подреди ги во:
а) растечки редослед, б) опаѓачки редослед.

ЗАДАЧА 5

Нацртај бројна права и означи ги вредностите на температурите дадени во табелата.
Во кој град е постудено:
а) Скопје или Битола б) Берово или Скопје
в) Битола или Берово г) Скопје или Струмица?

Град	Скопје	Битола	Берово	Струмица
Температура	–1 °C	0 °C	–4 °C	3 °C

Операции со цели броеви

ПРИМЕР 3

Проследи ги правилата за собирање на цели броеви:
а) $(+9)+(+18)=+27$
б) $(-7)+(-25)=-32$
в) $(+4)+(-19)=-15$
г) $(+26)+(-17)=+9$
д) $(+5)+(-5)=0$
ѓ) $(-7)+0=-7$

За секои $a, b \in \mathbb{N}_0$ важи:
$(+a)+(+b)=+(a+b)$
$(-a)+(-b)=-(a+b)$
$(+a)+(-b)=-(b-a)$, за $a<b$
$(+a)+(-b)=+(a-b)$, за $a \geq b$

ЗАДАЧА 6

Спореди ги збировите:
а) $17+(-24)$ и $(-24)+17$ б) $[27+(-14)]+7$ и $27+[(-14)+7]$



За собирањето на цели броеви важат следните својства (закони):
а) ако $a, b \in \mathbb{Z}$, тогаш и $a+b \in \mathbb{Z}$ — Закон за затвореност на собирањето
б) $a+b=b+a$, за секои $a, b \in \mathbb{Z}$ — Комутативен закон на собирањето
в) $(a+b)+c=a+(b+c)$, за секои $a, b, c \in \mathbb{Z}$ — Асоцијативен закон на собирањето

ЗАДАЧА 7

На почетната станица во еден автобус од градскиот сообраќај се качиле 17 патници.
На првата станица се качиле 10, а се симнале 3 патници, на втората се качиле 7, а се симнале исто така 7 патници, на третата се качиле 4, а се симнале 12 патници.
Колку патници го продолжиле патувањето?

Одземањето целите броеви се дефинира со помош на собирањето, односно ако $a, b \in \mathbb{Z}$, тогаш $a - b = a + (-b)$. Ова значи дека за одземањето може да ги користиме правилата за собирање на цели броеви.

ПРИМЕР 4

а) $12 - 17 = 12 + (-17) = -5$ б) $(-16 - 14) = (-16) + (-14) = -30$

ЗАДАЧА 8

Површината на Скадарско Езеро се наоѓа на 6 метри надморска висина, а неговата најголема длабочина е 44 метри. На која надморска висина се наоѓа дното на езерото?

ПРИМЕР 5

Проследи ги правилата за множење на цели броеви:

а) $(+9) \cdot (+7) = +63$
б) $(-14) \cdot (-27) = +378$
в) $(+102) \cdot (-11) = -1122$
г) $(-6) \cdot (+39) = -234$
д) $(+5) \cdot (-1) = -5$
ѓ) $(-127) \cdot 0 = 0$

За секои $a, b \in \mathbb{N}_0$ важи:
$(+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b)$
$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$
$(+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
$(-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b)$

ЗАДАЧА 9

Пресметај и спореди:

а) $(+55) \cdot (-42)$ и $(-42) \cdot (+55)$ б) $[(-42) \cdot (+5)] \cdot (-8)$ и $(-42) \cdot [(+5) \cdot (-8)]$
в) $[(+146) + (+72)] \cdot (-8)$ и $[(+146) \cdot (-8)] + [(+72) \cdot (-8)]$



За множењето на цели броеви важат следните својства (закони):

а) ако $a, b \in \mathbb{Z}$, тогаш и $a \cdot b \in \mathbb{Z}$	Закон за затвореност на множењето
б) $a \cdot b = b \cdot a$, за секои $a, b \in \mathbb{Z}$	Комутативен закон на множењето
в) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, за секои $a, b, c \in \mathbb{Z}$	Асоцијативен закон на множењето
г) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, и $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, за секои $a, b, c \in \mathbb{Z}$	Дистрибутивен закон на множењето во однос на собирањето
д) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, и $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$, за секои $a, b, c \in \mathbb{Z}$	Дистрибутивен закон на множењето во однос на одземањето

ЗАДАЧА 10

Пресметај:
а) $12 \cdot 125 - [(-15) \cdot (-30)]$ б) $(-152) \cdot (-9) - [108 \cdot 125 + (-910) \cdot (-11)]$

ЗАДАЧА 11

Во текот на еден процес на замрзнување температурата на воздухот од 40 °C се спушта за 5°C секој час. Колкава ќе биде температурата по 10 часа?

ПРИМЕР 6

Проследи ги правилата за делење на цели броеви:

а) $(+9) : (+3) = +3$
б) $(-14) : (-2) = +7$
в) $(+121) : (-11) = -11$
г) $(-36) : (+9) = -4$

За секои $a, b \in \mathbb{N}$ важи:
$(+a) : (+b) = +(a : b)$
$(-a) : (-b) = +(a : b)$
$(+a) : (-b) = -(a : b)$
$(-a) : (+b) = -(a : b)$

ПРИМЕР 7

За операцијата делење во множеството цели броеви не важи **законот за затвореност**, бидејќи таа е дефинирана преку операцијата делење на природни броеви, за која не важи законот за затвореност. Така, на пример, $2 : (-3) = -(2 : 3)$ не е цел број, бидејќи $2 : 3$ не е природен број.

Ако a и b се цели броеви такви што $a : c, b : c, (a + b) : c \in \mathbb{Z}$, тогаш важи $(a + b) : c = a : c + b : c$, за секои $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Десен дистрибутивен закон на делењето во однос на собирањето

ЗАДАЧА 4

Пресметај:
а) $5 + \{2 - [1 - (-3 + 8)]\}$ б) $\{20 - 3 \cdot [8 + (-4)]\} : [10 + 2 \cdot (-3)]$
в) $\{[50 - (20 + 15)] - 3\} : (-9 + 6)$ г) $\{7 + 2 \cdot [(-12) - (-3)]\} : [2 \cdot 15 : (-6)]$

ЗАДАЧА 12

Едно пладне на Антарктикот е измерена температура од 0 °C. Во следните 14 часа температурата се намалила до −42 °C. За колку степени Целзиусови просечно се менувала температурата во текот на еден час?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Спореди ги броевите a и b ако: а) $a = -15$ и $b = -(-5)$, б) $a = 25$ и $b = -(-15)$.
2. Кои цифри можат да бидат на местото на ѕвездичката за да биде точно:
а) $483 < 4*3$, б) $-2*5 > -225$, в) $-7*89 \leq -7589$?

3. Запиши го множеството од сите цели броеви x за кои важи:
   а) $|x| < 2$, б) $|x| = 4$, в) $|x| = 0$, г) $|x| \leq 3$.

4. Збирот на броевите −52 и 120 помножи го со разликата на бројот −52 со бројот 120.

5. Кој број се добива ако апсолутната вредност од збирот на броевите −15 и 25 ја поделиме со апсолутната вредност на разликата на бројот -5 со бројот 5?

6. Во Скопје температурата била -5 °C во понеделник, а потоа паднала за 2 °C во вторник.
   а) Колкава била температурата во Скопје во вторник?
   б) В среда температурата се покачила за 4 °C. Колкава била температурата в среда?

7. Најниската измерена температура на Земјата е −70 °C. На Нептун е за 150 °C пониска од таа на Земјата, на Сатурн е за 40 °C повисока од таа на Нептун, на Уран е за 34 °C повисока од таа на Сатурн, на Плутон е за 10 °C пониска од таа на Нептун, на Јупитер е за 30 °C повисока од таа на Сатурн.
   а) Најди ги најниските температури на Јупитер, Сатурн, Уран, Нептун и Плутон.
   б) Подреди ги температурите на планетите, почнувајќи од најниската.

8. Милан вложил на берза 70000 денари пред 6 месеци. Првиот месец остварил добивка од 3200 денари, наредните 2 месеци забележал загуба од по 2400 денари, а наредните 3 месеци добивка од по 2200 денари. Колку пари има Милан по шестмесечното тргување на берза?

9. Лифт се спушта во рударско окно со брзина од 6 метри во минута. Ако спуштањето започне од 10 метри над нивото на земјата, колку време ќе биде потребно за да се стигне до 350 метри под нивото на земјата?

1.8. Рационални броеви и операции со рационални броеви

Рационалните броеви

АКТИВНОСТ

а) Петмина другари треба да поделат едно јаболко на еднакви делови. Колкав дел од јаболкото добил секој од другарите?
б) За 4 тетратки Ева платила 30 денари. Колку денари платила за 1 тетратка?

Дали можеш да го искажеш делот од јаболкото што треба да го добие секој од пријателите, како и цената на 1 тетратка со цели броеви? Со кои броеви ќе го направиш тоа?

Видовме дека операцијата делење не е секогаш изводлива во множеството на цели броеви. Како последица, постојат секојдневни ситуации кои не може да се изразат со помош на целите броеви, па се појавува потреба од проширување на множеството цели броеви со ново множество броеви наречено множество **рационални броеви**.



Записот $\frac{a}{b}$, каде што a и b се цели броеви, $b \neq 0$, се вика **дропка**.

Бројот a се вика **броител**, бројот b се вика **именител** и „–“ се вика **дробна црта**.
За две дропки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ велиме дека се **еднакви** ако и само ако $a \cdot d = b \cdot c$.

Секоја дропка $\frac{a}{b}$ разгледувана како делење на a со b, претставува нов број, наречен **рационален број**. Притоа еднакви дропки претставуваат ист рационален број. Сите рационални броеви го сочинуваат множеството $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z} \text{ и } b \neq 0\right\}$ наречено **множество рационални броеви**.
Множеството рационални броеви е унија од множеството негативни рационални броеви, нулата и позитивните рационални броеви:
$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ каде $\mathbb{Q}^- = \left\{\frac{-a}{b} | a, b \in \mathbb{N}\right\}$ и $\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{N}\right\}$.

ПРИМЕР 1

Секој цел број a може да се запише како дропка.
а) $4 = \frac{4}{1}$ или $4 = \frac{8}{2}$ б) $-5 = \frac{-5}{1}$ или $-5 = \frac{-15}{3}$



Секој цел број a може да се запише како дропка со именител 1, односно $a = \frac{a}{1}$.

Ако броителот и именителот на една дропка се помножат со еден ист број, различен од нула, се добива дропка еднаква на дадената, односно $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$, за $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и $c \neq 0$.
Оваа постапка се нарекува **проширување на дропка**.

ПРИМЕР 2

Прошири ја дропката $\frac{4}{7}$ со: а) бројот 4 б) бројот 7

а) $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{16}{28}$ б) $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \frac{28}{49}$

Ако броителот и именителот на една дропка се поделат со еден ист број, различен од нула, се добива дропка еднаква на дадената, односно $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$, за $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и $c \neq 0$.
Оваа постапка се нарекува **скратување на дропка**.

ПРИМЕР 3

Дали може да се скрати дропката: а) $\frac{8}{10}$ б) $\frac{6}{25}$

а) $\frac{8}{10} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$ Броителот и именителот ги разложуваме на прости множители. Заедничкиот делител 2 го изоставуваме од броителот и именителот.

б) $\frac{6}{25} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 5}$ НЗД (6, 25)=1. Дропката е нескратлива.

Ако броителот и именителот на една дропка се заемно прости броеви, односно ако НЗД $(a, b) = 1$, дропката $\frac{a}{b}$ се вика **нескратлива**.

Од својството на проширување и скратување на дропка може да заклучиме дека две дропки се еднакви ако и само ако едната е добиена од другата со проширување или скратување.

ПРИМЕР 4

Сведи ги на ист именител дропките $\frac{3}{4}, \frac{1}{6}$ и $\frac{8}{3}$.

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$ Наоѓаме НЗС на именителите на дропките: НЗС (4, 6, 3) = 12

$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{2}{12}$ Го делиме НЗС со именителот на секоја дропка.

$\frac{8}{3} = \frac{8 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{32}{12}$ Со добиените количници ја прошируваме секоја дропка.

ЗАДАЧА 1

Сведи ги на најмал заеднички именител дропките:

а) $\frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{12}$ б) $\frac{3}{20}, \frac{5}{8}, \frac{15}{16}$ в) $\frac{7}{9}, \frac{5}{12}, \frac{8}{15}, \frac{3}{10}$

Од две дропки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ со еднакви позитивни именители, помала е онаа која има помал броител, односно $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$ само ако $a < c$.

Дропките со различни именители ги споредуваме така што ги сведуваме на еднаков именител, потоа ги споредуваме како дропки со еднакви именители.

ЗАДАЧА 2

Атлантскиот Океан зафаќа $\frac{3}{10}$ од вкупната водена површина на Земјата, а Тихиот Океан зафаќа $\frac{9}{20}$. Кој од нив зафаќа помал дел од водената површина на Земјата?

ПРИМЕР 5

На бројната права се претставени неколку рационални броеви (цртеж 1).



Цртеж 1

Кога споредуваме два реални броја a и b, претставени на бројната права, бројот a е помал од бројот b ако на бројната права a е лево од b.

ЗАДАЧА 3

а) Претстави ги на бројна права рационалните броеви: $-4\frac{1}{2}, 3, -\frac{5}{2}, 2\frac{1}{4}$ и $-\frac{1}{3}$.

б) Со помош на бројната права запиши ги броевите под а) во растечка низа почнувајќи од најмалиот.

Операции со рационални броеви

АКТИВНОСТ

Како ќе пресметаш колкав дел од колачот изеле Илина и Илир заедно ако:

а) Илина изела $\frac{1}{8}$ од колачот, а Илир $\frac{2}{8}$ од колачот.

б) Илина изела $\frac{2}{7}$ од колачот, а Илир $\frac{1}{6}$ од колачот.

ПРИМЕР 6

Собери ги дропките: а) $\frac{3}{7}$ и $\frac{6}{7}$ б) $\frac{13}{8}$ и $\frac{4}{5}$

а) $\frac{3}{7}+\frac{6}{7}=\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}$ б) $\frac{13}{8}+\frac{4}{5}=\frac{13\cdot 5+8\cdot 4}{8\cdot 5}=\frac{97}{40}=2\frac{17}{40}$

Две дропки со еднакви именители се собираат кога збирот од броителите се земе за броител на дропката збир, а за именител се земе истиот именител, односно

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ и $c \neq 0$.

Две дропки со различни именители се собираат, кога тие прво ќе се сведат на еднакви именители, а потоа се собираат како дропки со еднакви именители, односно

$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ и $c, d \neq 0$.

ПРИМЕР 7

Пресметај: а) $\frac{3}{4}+0$ б) $0+\frac{-7}{8}$ в) $\frac{15}{16}+\frac{-15}{16}$

а) $\frac{3}{4}+0=\frac{3}{4}+\frac{0}{4}=\frac{3+0}{4}=\frac{3}{4}$ б) $0+\frac{-7}{8}=\frac{0}{8}+\frac{-7}{8}=\frac{0-7}{8}=-\frac{7}{8}$

в) $\frac{15}{16}+\frac{-15}{16}=\frac{15+(-15)}{16}=\frac{0}{16}=0$

ЗАДАЧА 4

Провери ја точноста на равенството: а) $1\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}$ б) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)$



Операцијата собирање на рационалните броеви е затворена, комутативна и асоцијативна.

ЗАДАЧА 5

Пресметај го периметарот на триаголникот, ако должините на неговите страни се $3\frac{1}{2}$ cm, $2\frac{2}{3}$ cm и $4\frac{5}{6}$ cm.

АКТИВНОСТ

За една театарска претстава се продале билети за $\frac{5}{6}$ од седиштата. Поради невреме се пополниле само $\frac{3}{4}$ од седиштата.
Како ќе пресметаш колкав дел од седиштата, за кои биле продадени билети, останале непополнети?

ПРИМЕР 8

Пресметај ја разликата: а) $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}$ б) $2\frac{3}{4}-7$

а) $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$ б) $2\frac{3}{4}-7=\frac{11}{4}-\frac{7}{1}=\frac{11\cdot 1-4\cdot 7}{4\cdot 1}=\frac{-17}{4}=-4\frac{1}{4}$

Две дропки со еднакви именители се одземаат кога од броителот на дропката намаленик се одземе броителот на дропката намалител и добиената разлика се земе за броител на дропката разлика, а за именител се земе истиот именител, односно
$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$, $a, b, c\in\mathbb{Z}$ и $c\neq 0$.

Две дропки со различни именители се одземаат кога тие прво ќе се сведат на еднакви именители, а потоа се одземаат како дропки со еднакви именители, односно
$\frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{ad-bc}{cd}$, $a, b, c, d\in\mathbb{Z}$ и $c, d\neq 0$.

ЗАДАЧА 6

Аника ја прочитала лектирата за 3 дена. Првиот ден прочитала $\frac{3}{5}$ од книгата, вториот за $\frac{3}{10}$ помалку од првиот ден. Кој дел од лектирата го прочитала третиот ден?

АКТИВНОСТ

Мерита отишла во маркет и со себе зела $\frac{3}{4}$ од нејзината заштеда. Од парите што ги зела $\frac{4}{5}$ ги потрошила за храна. Како ќе пресметаш колкав дел од заштедата потрошила за храна?

ПРИМЕР 7

Пресметај го производот: а) $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}$ б) $\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{4}$.

а) $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{8\cdot 7}=\frac{15}{56}$ б) $\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{4}=\frac{5\cdot 6}{7\cdot 4}=\frac{30}{28}=\frac{15}{14}=1\frac{1}{14}$

Производот на две дропки е дропка чиј броител е еднаков на производот од броителите на множителите, а именителот е производ од именителите на множителите, односно
$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ и $c, d \neq 0$.

ПРИМЕР 8

Пресметај го производот: а) $\frac{3}{8} \cdot 1$ б) $\frac{4}{9} \cdot 0$ в) $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}$

а) $\frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3 \cdot 1}{8 \cdot 1} = \frac{3}{8}$

б) $\frac{4}{9} \cdot 0 = \frac{4}{9} \cdot \frac{0}{1} = \frac{4 \cdot 0}{9 \cdot 1} = \frac{0}{9} = 0$

в) $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{20}{20} = 1$

Дропките $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{4}$ се **реципрочни**.

ЗАДАЧА 7

Провери ја точноста на равенството:

а) $\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

б) $\left(\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{9}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{7}\left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4}\right)$

в) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$

г) $\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Операцијата множење на рационалните броеви е затворена, комутативна, асоцијативна и дистрибутивна во однос на собирањето и одземањето.

ЗАДАЧА 8

Колку квадратни метри паркет треба да купи Осман за својата соба со димензии $3\frac{1}{4}$ m и $4\frac{2}{3}$ m?

АКТИВНОСТ

Едно шише собира $\frac{3}{4}$ l вода.

Како ќе пресметаш колку такви шишиња можат да се наполнат со $8\frac{1}{4}$ l вода?

ПРИМЕР 9

Пресметај го количникот: а) $\frac{3}{4} : \frac{7}{9}$ б) $\frac{5}{6} : \frac{25}{36}$.

а) $\frac{3}{4} : \frac{7}{9} = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{7} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 7} = \frac{27}{28}$

б) $\frac{5}{6} : \frac{25}{36} = \frac{5}{6} \cdot \frac{36}{25} = \frac{5 \cdot 36}{6 \cdot 25} = \frac{1 \cdot 6}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

Количникот на две дропки е еднаков на производот од деленикот и реципрочната дропка на делителот, односно $\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ и $b, c, d \neq 0$.

ЗАДАЧА 10

Пресметај: а) $\left\{3 - \left[4\frac{1}{2} - \frac{1}{2} : \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\right)\right]\right\} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$ б) $3 - \left\{\frac{1}{4} - \left(-4\frac{4}{9}\right)\left[(-2) - \frac{5}{6} : \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{7}\right)\right]\right\}$

Објасни го редоследот на извршување на операциите.

ЗАДАЧА 11

За еден костум кројачот троши $3\frac{1}{4}$ m штоф. Колку костуми ќе сошие од $22\frac{3}{4}$ m штоф?

ПРИМЕР 10

Запиши го количникот во вид на двојна дропка: а) $\frac{3}{4} : 5$ б) $4 : \frac{2}{3}$ в) $1\frac{3}{7} : \frac{4}{5}$

а) $\frac{3}{4} : 5 = \frac{\frac{3}{4}}{5}$ б) $4 : \frac{2}{3} = \frac{4}{\frac{2}{3}}$ в) $1\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{1\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{10}{7}}{\frac{4}{5}}$

Децимално претставување на рационалните броеви

АКТИВНОСТ

Дропките $\frac{91}{10}$, $\frac{127}{100}$ и $\frac{3009}{1000}$ се примери на децимални дропки.
Објасни ја постапката со која се запишани без именител:

$\frac{91}{10} = \frac{90+1}{10} = \frac{90}{10} + \frac{1}{10} = 9 + \frac{1}{10} = 9{,}1$

$\frac{127}{100} = \frac{100+27}{100} = \frac{100}{100} + \frac{27}{100} = 1 + \frac{27}{100} = 1{,}27$

$\frac{3009}{1000} = \frac{3000+9}{1000} = \frac{3000}{1000} + \frac{9}{1000} = 3 + \frac{9}{1000} = 3{,}009$

Како ги нарекуваме добиените записи?

Ако до еден цел број од десната страна се запише запирка, а потоа се наредат конечно многу (или бесконечно многу) цифри, се добива запис кој се вика конечен (или бесконечен) децимален број. Ваквите записи, со едно име, се викаат **децимални броеви.**

Секој **децимален број** е составен од два дела кои се одделени со запирка: **цел дел** пред запирката и **децимален дел** после запирката. Местата на цифрите од децималниот дел се викаат **децимални места**, а соодветните цифри се викаат **децимали**.
Секој рационален број (дропка) може да се запише како **децимален број**.

ПРИМЕР 11

Запиши ја како децимален број дропката: а) $\frac{1}{5}$ б) $\frac{1}{2}$ в) $\frac{9}{20}$

а) $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10} = 0{,}2$ б) $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$ в) $\frac{9}{20} = \frac{9 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{45}{100} = 0{,}45$

Дропка може да се запише како децимален број со делење на броителот и именителот.

ПРИМЕР 12

Запиши ја со делење како децимален број дропката а) $\frac{1}{4}$ б) $\frac{1}{3}$ в) $\frac{7}{22}$

а) $\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25$

б) $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}333\ldots$

в) $\frac{7}{22} = 7 : 22 = 0{,}31818\ldots$

Кога делењето завршува се добива **конечен децимален број**.

Кога делењето не завршува се добива **бесконечен периодичен децимален број**.



Бесконечниот децимален број кој има една цифра или конечна низа цифри кои се повторуваат по ист редослед непосредно после децималната запирка, се вика **чист периодичен децимален број**.

Бесконечен децимален број за кој после неколку ненулти децимали една цифра или конечна низа цифри се повторуваат по ист редослед се вика **мешан периодичен децимален број**. Низата од цифри која се повторува се вика **период на децималниот број**.

ПРИМЕР 13

а) Бројот 2,6666... е чист периодичен децимален број и се запишува како 2,(6).

б) Бројот 4,12323... е мешан периодичен децимален број и се запишува како 4,1(23).

Секој конечен или бесконечен периодичен децимален број може да се запише како рационален број (дропка).

ПРИМЕР 14

а) Бројот 0,(18) може да се запише како дропка на следниот начин:

$$\begin{aligned} 0,(18) &= x \\ 0,(18)\cdot 10^2 &= x\cdot 10^2 \\ 18,(18) &= x\cdot 10^2 \\ 18+0,(18) &= x\cdot 10^2 \\ 18+x &= x\cdot 10^2 \\ 18 &= x\cdot 10^2 - x \\ 18 &= x(10^2-1) \\ x &= \frac{18}{10^2-1} = \frac{18}{100-1} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11} \end{aligned}$$

б) Бројот 0,24(36) може да се запише како дропка на следниот начин:

$$\begin{aligned} 0,24(36) &= x \\ 0,24(36)\cdot 10^2 &= x\cdot 10^2 \\ 24,(36) &= x\cdot 10^2 \\ 24+0,(36) &= x\cdot 10^2 \\ 24+\frac{36}{10^2-1} &= x\cdot 10^2 \\ 24(10^2-1)+36 &= x\cdot 10^2(10^2-1) \\ x &= \frac{2412}{(10^2-1)\cdot 100} = \frac{2412}{9900} = \frac{67}{275} \end{aligned}$$

ПРИМЕР 15

Спореди ги броевите: а) 5,63 и 3,63 б) 3,8764 и 3,8774 в) −5,3712 и −5,3743

а) Кога двата децимални броја се позитивни, тогаш прво се споредуваат целите делови. Ако целите делови не се исти, тогаш поголем е бројот што има поголем цел дел. $5{,}63 > 3{,}63$, затоа што $5 > 3$.

б) Ако целите делови им се исти, тогаш се споредуваат децималите, прво десетини, потоа стотините итн. $3{,}8764 < 3{,}8774$, затоа што во третата децимала $6 < 7$.

в) Ако споредуваме два негативни децимални броја, тогаш поголем е бројот што има помала апсолутна вредност. $-5{,}3712 > -5{,}3743$, затоа што $|-5{,}3712| < |-5{,}3743|$.

Операции со децимални броеви

АКТИВНОСТ

Изврши ги назначените операции: а) $238 + 56$ б) $769 - 79$ в) $56 \cdot 125$ г) $873:32$

ПРИМЕР 16

Пресметај ги збирот и разликата на децималните броеви: а) $2{,}35 + 3{,}9$ б) $17{,}2 - 11{,}36$

а) $\begin{array}{r} 2{,}35 \\ +\ 3{,}9 \\ \hline 6{,}25 \end{array}$ б) $\begin{array}{r} 17{,}2 \\ -\ 11{,}36 \\ \hline 5{,}84 \end{array}$

Собирањето и одземањето започнуваат со цифрите на првата позиција оддесно.
Децималната запирка треба да биде на иста вертикала.

ЗАДАЧА 12

Пресметај: а) $23{,}7 - 35 + 0{,}353$ б) $3{,}235 - 6{,}55 - 4{,}6783$

ПРИМЕР 17

Пресметај ги производот и количникот на децималните броеви: а) $2{,}7 \cdot 3{,}47$ б) $6{,}342:0{,}25$

а) $\begin{array}{r} 27 \cdot 347 \\ 189 \\ 108 \\ +\ 81 \\ \hline 9369 \end{array}$

$2{,}7 \cdot 3{,}47 = 9{,}369$

Децимални броеви се множат како што се множат природните броеви.
Во производот се одделуваат оддесно налево онолку децимални места колку што има децимални места во двата множители заедно.

б) $6{,}342 : 0{,}25 = 634{,}2 : 25 = 25{,}368$

$\begin{array}{r} 50 \\ \hline 134 \\ 125 \\ \hline 92 \\ 75 \\ \hline 170 \\ 150 \\ \hline 200 \\ 200 \\ \hline 0 \end{array}$

Пред да започне делењето на децималните броеви, деленикот и делителот ги множиме со некоја декадна единица така што делителот да стане цел број.
Потоа делењето се изведува како што се дели со природен број.

ЗАДАЧА 13

Пресметај: а) $9{,}758 : 3{,}4 - 2{,}08 : 4$ б) $(5{,}6 - 1{,}8 : 3) \cdot 0{,}08$

ЗАДАЧА 14

Плоштината на еден правоаголник изнесува 4,88 квадратни метри, а должината на едната негова страна 1,6 метри. Колку изнесува:
а) должината на другата страна б) периметарот на правоаголникот?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Сведи ги на ист именител дропките: а) $\frac{5}{12}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}$ и $\frac{2}{3}$ б) $\frac{5}{6}, 1\frac{1}{6}, 3\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{9}$

2. Подреди ги дропките, почнувајќи од најмалата:
   а) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{7}{12}$ и $\frac{1}{2}$ б) $\frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{13}{12}$ и $\frac{1}{2}$ в) $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}, 3\frac{5}{6}$ и $-1\frac{7}{12}$.
   Потоа претстави ги на бројната права.

3. Лина претрчала $\frac{3}{4}$ од маратонската патека, Адмир $\frac{5}{7}$ од патеката, а Симон $\frac{8}{9}$ од патеката. Кој од нив истрчал најголем дел од патеката, а кој најмал дел од патеката?

4. Пресметај: а) $\frac{13}{4} - 2\frac{5}{6} + 2\frac{1}{9} - 1$ б) $\left(\frac{3}{4} - 2\frac{1}{7}\right) \cdot \left(3\frac{1}{4} - 1\right)$ в) $\left(3\frac{1}{6} - 2\frac{3}{4}\right) : \frac{7}{12}$

5. Пресметај: а) $\left(\frac{5}{6} + \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{12}\right)$ б) $\dfrac{\frac{5}{6} + \frac{3}{4}}{\frac{7}{8} - \frac{1}{12}}$ в) $\dfrac{\frac{5}{21} - \frac{17}{21} : \frac{34}{7} - \frac{1}{2}}{\frac{8}{7} - \frac{7}{2} + \frac{8}{21} \cdot \frac{9}{4}}$

6. Еден базен се полни со една цевка за 8 часа, а со друга цевка за 12 часа. Колкав дел од базенот ќе се наполни со двете цевки за 2 часа?

7. Запиши ја како децимален број дропката: а) $\frac{13}{8}$ б) $\frac{9}{5}$ в) $\frac{11}{25}$ г) $\frac{3}{7}$

8. Запиши го како нескратлива дропка бројот: а) 0,34 б) 0,02 в) 4,125 г) 1,25

9. Запиши го како дропка бројот: а) 0,(7) б) 3,(51) в) 1,3(4) г) 5,24(3)

10. Пресметај: а) $14{,}16 \cdot 3{,}7 - 12{,}24 : 3{,}3 + 5{,}8$ б) $4{,}2 : 3{,}5 \cdot 2{,}6 - (5{,}4 : 0{,}02) : 0{,}6$

11. Растојанието од Земјата до Марс е приближно 225,3 милиони километри, а до Венера 108,2 милиони километри.
    а) Која планета е подалеку од Земјата?
    б) Колку е разликата на растојанието од Земјата до Марс со растојанието од Земјата до Венера?

1.9. Реални броеви и интервали на реалната права

Реални броеви

АКТИВНОСТ

а) Запиши го во вид на дропка децималниот број $-0{,}75$.

б) Запиши ги во вид на децимален број дропките $\frac{3}{4}$ и $\frac{11}{45}$.

Видовме дека секој конечен и секој бесконечен периодичен број може да го запишеме како дропка, односно како рационален број.

ПРИМЕР 1

Пресметај ја должината на хипотенузата во рамнокрак правоаголен триаголник со катета $a = 1$ cm.

Должината на хипотенузата $c = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}$ cm. Применуваме Питагорова теорема.

Во погорниот пример се сретнавме со бројот $\sqrt{2}$. Ако ја пресметаме неговата вредност со помош на калкулатор добиваме $\sqrt{2} = 1{,}4142...$ Доколку $\sqrt{2}$ е рационален број, на пример $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, каде НЗД $(a, b) = 1$, тогаш $a^2 = 2b^2$, па a е парен број, $a = 2a_1$. Тогаш $4a^2_1 = 2b^2$, $2a^2_1 = b^2$, па и b мора да е парен број. Тоа е во спротивност со уловот дека a и b се заемно прости, па заклучуваме дека $\sqrt{2}$ не е рационален број.

Бесконечните непериодични децимални броеви се нарекуваат **ирационални броеви**. Тие го сочинуваат **множеството ирационални броеви** кое се означува со I.

ПРИМЕР 2

а) Броевите $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{5}$ се примери на ирационални броеви,

б) Ирационалните броеви не настануваат само со коренување. Броевите $\frac{1}{\pi}$, π, π^2, π^3, $1{,}323323332...$, $2{,}070070007...$ се исто така ирационални броеви.

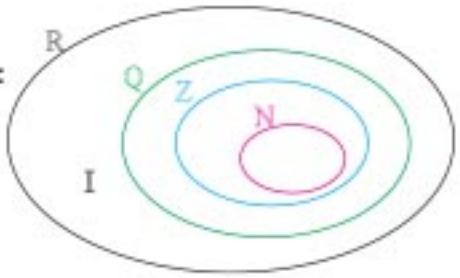
Множеството рационални и множеството ирационални броеви го сочинуваат множеството **реални броеви**, односно

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

ЗАДАЧА 1

На цртеж 1 со Венов дијаграм се претставени множествата: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ и $\mathbb{R}$. Дали е точно тврдењето:

а) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ б) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ в) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$
г) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ д) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{R}$ ѓ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$
е) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ж) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ з) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
ѕ) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ и) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ ј) $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$



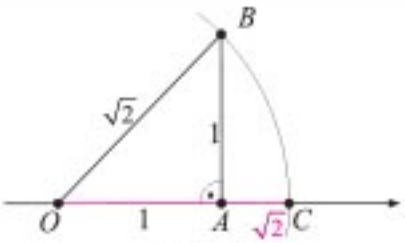
Цртеж 1

На секоја точка од бројната права може да се придружи точно еден реален број и обратно, на секој реален број може да се придружи само една точка од бројната права. Со други зборови, постои обратно еднозначна кореспонденција меѓу точките од бројната права и множеството реални броеви. Од тие причини, бројната права ја нарекуваме **реална права**.

ПРИМЕР 3

Определи ја на реалната права точката што одговара на бројот $\sqrt{2}$.

Конструираме рамнокрак правоаголен триаголник OAB со катети $\overline{OA} = \overline{AB} = 1$. Тогаш за неговата хипотенуза важи $\overline{OB} = \sqrt{2}$ (цртеж 1). Ако таа должина ја нанесеме на бројната права ја добиваме точката C што одговара на бројот $\sqrt{2}$.



Цртеж 2

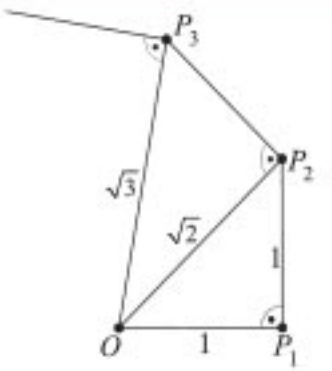
АКТИВНОСТ

Земи широк лист од хартија и конструирај ја „**спиралата од квадратни корени**“ на следниот начин:

- ✓ Означи точка O и нацртај отсечка OP_1 со единична должина. Нацртај отсечка P_1P_2 со единична должина која е нормална на отсечката OP_1.
- ✓ Нацртај отсечка P_2P_3 со единична должина која е нормална на отсечката OP_2.
- ✓ Нацртај отсечка P_3P_4 со единична должина која е нормална на отсечката OP_3.

Продолжувајќи на овој начин добиваме отсечки со должина: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$.... итн. (цртеж 3).

Нанеси ги на бројната права должините $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{4}$.



Цртеж 3

ЗАДАЧА 2

Претстави ги на реалната права броевите $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$.

ПРИМЕР 4

Спореди ги броевите: а) $\sqrt{2}$ и $\frac{7}{5}$ б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\sqrt{2}$

а) $\frac{7}{5} = 1{,}4$ и $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ б) $\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}118$ и $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$

$\frac{7}{5} < \sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{5}}{2} < \sqrt{2}$

Во множеството реални броеви се дефинирани операциите собирање и множење во согласност со операциите собирање и множење во множеството рационални броеви и ги поседуваат истите својства како и во множеството рационални броеви.

ПРИМЕР 5

Изврши ги назначените операции: а) $(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$ б) $6\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}$

а) $(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) = (2\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (5\sqrt{3} - 3\sqrt{3})$

$= (2+1)\sqrt{2} + (5-3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

б) $6\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 12 \cdot 5 = 60$

Апсолутна вредност на реален број се дефинира аналогно како и апсолутна вредност на цел број, односно за секој реален број a:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Геометриски, апсолутната вредност на реалниот број a е еднаква со растојанието на бројот a од бројот 0. Растојанието меѓу две точки од бројната права секогаш е ненегативен број, од што следува дека апсолутната вредност на бројот a е ненегативен број.

ПРИМЕР 6

Пресметај: а) $|-\sqrt{5}|$ б) $|\pi|$ в) $\left|-\frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}\right|$ г) $\left|\frac{\sqrt{11}}{-\pi\sqrt{3}}\right|$

а) $|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$ б) $|\pi| = \pi$

в) $\left|-\frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}\right| = \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ г) $\left|\frac{\sqrt{11}}{-\pi\sqrt{3}}\right| = \frac{\sqrt{11}}{\pi\sqrt{3}}$

ЗАДАЧА 3

Нека $a = -1$ и $b = 1{,}5$. Провери дали е точно:

а) $a \leq |a|$ б) $|a - b| = |b - a|$

в) $|a + b| \leq |a| + |b|$ г) $|a - b| \geq |a| - |b|$

д) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ѓ) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Приближни пресметувања со реални броеви

Ирационалните броеви се бесконечни непериодични децимални броеви, кои не сме во можност точно да ги запишеме. Затоа најчесто нив ги заменуваме со приближни рационални броеви, со **кусок** или со **вишок**.

ПРИМЕР 7

Најди ја вредноста на $\sqrt{2}$ до три децимали.

Проценуваме:	Коренуваме:	Заменуваме со приближен рационален број:
$1^2 < 2 < 2^2$	$1 < \sqrt{2} < 2$	$\sqrt{2} \approx 1$ до една единица со кусок, и $\sqrt{2} \approx 2$ до една единица со вишок;
$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$	$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$ до една децимала со кусок, и $\sqrt{2} \approx 1{,}5$ до една децимала со вишок;
$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$	$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$ до две децимали со кусок, и $\sqrt{2} \approx 1{,}42$ до две децимали со вишок;
$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$	$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$	$\sqrt{2} \approx 1{,}414$ до три децимали со кусок, и $\sqrt{2} \approx 1{,}415$ до три децимали со вишок.

Опишаната постапка за наоѓање на приближна вредност на ирационален број се нарекува **„процени и погоди“**.

ЗАДАЧА 4

Најди ја вредноста на $\sqrt{11}$ до две децимали, а потоа провери ја твојата пресметка со калкулатор.

ПРИМЕР 8

Бројните изрази $2 + \sqrt{3}$, $5 - \sqrt{3}$, $3 \cdot \sqrt{2}$ и $\frac{5}{\sqrt{3}}$ се примери на ирационални изрази, бидејќи претставуваат ирационални броеви.
Приближните вредности на ирационалните изрази ги добиваме кога ирационалните броеви ги заменуваме со соодветни приближни рационални вредности.

ПРИМЕР 9

Пресметај: а) $\frac{2}{9} + \sqrt{3}$ со две децимали б) $\sqrt{345} - \sqrt{344}$ со три децимали

а) Заокружуваме:
$\frac{2}{9} \approx 0{,}22$ и $\sqrt{3} \approx 1{,}73$
Пресметуваме: $\frac{2}{9} + \sqrt{3} \approx 0{,}22 + 1{,}73 \approx 1{,}95$

б) $\sqrt{345} \approx 18{,}574$ $\sqrt{344} \approx 18{,}547$
$\sqrt{345} - \sqrt{344} = 18{,}574 - 18{,}547 = 0{,}027$

Броевите во изразот ги заокружуваме на бараниот број децимали.
Ако првата од отфрлените цифри е 0, 1, 2, 3 или 4, тогаш последната цифра што се заокружува останува непроменета.
Ако првата од отфрлените цифри е 5, 6, 7, 8 или 9, тогаш последната цифра што се заокружува се зголемува за 1.

Ако треба да заокружиме поголем број на собироци на пример на две децимали, тогаш препорачливо е секој од собироците да се претстави барем на три децимали, да се изврши собирање или одземање и резултатот да се заокружи на две децимали. Зошто?

Интервали на реалната права

Нека $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.
Множеството од сите реални броеви x такви што $a < x < b$ го означуваме со (a, b) и го нарекуваме **отворен интервал**:
$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } a < x < b\}$



Цртеж 2

На реалната права отворениот интервал е множеството точки, кои се наоѓаат меѓу точките $x = a$ и $x = b$, при што точки $x = a$ и $x = b$ не припаѓаат на интервалот (цртеж 2).

Множеството од сите реални броеви x такви што $a \leq x < b$ го означуваме со $[a, b)$ и го нарекуваме **полуотворен интервал од десно**: $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } a \leq x < b\}$.



Цртеж 3

На реалната права отворениот интервал од десно е множеството точки, кои се наоѓаат меѓу точките $x = a$ и $x = b$, при што точката $x = a$ припаѓа на интервал, а точката $x = b$ не припаѓа на интервалот (цртеж 3).

Множеството од сите реални броеви x такви што $a < x \leq b$ го означуваме со $(a, b]$ и го нарекуваме **полуотворен интервал од лево**: $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } a < x \leq b\}$.



Цртеж 4

На реалната права отворениот интервал од лево е множеството точки, кои се наоѓаат меѓу точките $x = a$ и $x = b$, при што точката $x = a$ не припаѓа на интервалот, а точката $x = b$ припаѓа на интервалот (цртеж 4).

Множеството од сите реални броеви x такви што $a \leq x \leq b$ го означуваме со $[a, b]$ и го нарекуваме **затворен интервал**: $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } a \leq x \leq b\}$.



Цртеж 5

На реалната права затворениот интервал од лево е множеството точки, кои се наоѓаат меѓу точките $x = a$ и $x = b$, при што точките $x = a$ и $x = b$ припаѓаат на интервалот (цртеж 5).

Множествата $[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } x \geq a\}$ и $(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } x \leq a\}$ ги нарекуваме **неограничени затворени интервали** (цртеж 6 и цртеж 7).



Цртеж 6



Цртеж 7

Множествата $(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } x > a\}$ и $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } x < a\}$ ги нарекуваме **неограничени отворени интервали** (цртеж 8 и цртеж 9).



Цртеж 8

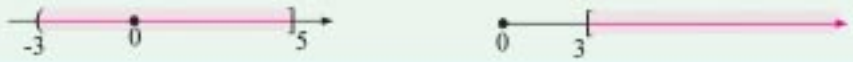


Цртеж 9

ПРИМЕР 10

Запиши го описно и претстави го на реалната права интервалот (цртеж 10):
а) $(-3, 5]$ б) $[3, +\infty)$

а) $(-3, 5] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } -3 < x \leq 5\}$ б) $[3, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ и } x \geq 3\}$



Цртеж 10

ЗАДАЧА 5

Запиши го описно и претстави го на реалната права интервалот:
а) $(-2, 4)$ б) $[-3, -1)$ в) $(5, 8]$ г) $[-5, 4]$
д) $[-2, +\infty)$ ѓ) $(-\infty, 1]$ е) $(4, +\infty)$ ж) $(-\infty, 3)$

ПРИМЕР 11

Најди: а) $(-1, 4] \cup [2, 7]$ б) $[-7, 5] \cap [-8, 2)$

а) $(-1, 4] \cup [2, 7] = (-1, 7]$ б) $[-7, 5] \cap [-8, 2) = [-7, 2)$

ЗАДАЧА 6

Радар мери брзина во интервалот [50, 120] километри на час. Дали може да биде измерена брзината на возач што вози со брзина 120 километри на час? А со 49,9 километри на час?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Кои од следниве тврдења се точни:
   а) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ б) $\mathbb{Z} \cap \mathrm{I} = \emptyset$ в) $\mathrm{Q} \subset \mathrm{I}$ г) $\mathrm{Q} \subset \mathbb{R}$
2. Спореди ги реалните броеви:
   а) $-13{,}0010\ldots$ и $-13{,}0001$ б) $\sqrt{3}$ и $\frac{7}{5}$ в) $\frac{36}{25}$ и $\sqrt{2}$
3. Нека $a = -3{,}7$ и $b = -11{,}5$. Пресметај ја вредноста на:
   а) $|a + b|$ б) $|a - b|$ в) $|a \cdot b|$ г) $\frac{|a|}{|b|}$
4. Пресметај со три децимали:
   а) $\sqrt{49} - \sqrt{3} + \pi$ б) $5 : \sqrt{5} + 2\sqrt{7}$ в) $3\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} - 1\frac{3}{4} \cdot \sqrt{5}$ г) $3\pi + 4 \cdot \sqrt{6} - \sqrt{17}$
5. Клетка има форма на топка со радиус $r = 2{,}1$ микро метри.
   Формула за волумен на топката се пресметува по формулата $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
   Пресметај го приближно волуменот на клетката, ако $\pi \approx 3{,}14$.
6. Кои од следниве тврдења се точни:
   а) $2 \in (2, 5)$ б) $3 \in (-7, 3]$ в) $\sqrt{2} \in [1, 3]$ г) $7 \in (-\infty, -7]$

7. Запиши го како интервал множеството:

а) $A=\{x \mid x\in\mathbb{R} \text{ и } -2\le x<1\}$ б) $B=\{x \mid x\in\mathbb{R} \text{ и } -2,4<x<6,7\}$

в) $C=\{x \mid x\in\mathbb{R} \text{ и } -\infty<x\le\sqrt{5}\}$ г) $D=\{x \mid x\in\mathbb{R} \text{ и } -\sqrt{3}<x<\infty\}$

8. Претстави го на бројна оска и запиши го описно интервалот:

а) $[-3, 5]$ б) $(1, 3)$ в) $[-6, 7)$ г) $(-\infty, 1)$ д) $[3, +\infty)$

9. На бројна оска означи ја унијата на интервалите:

а) $(-3, 4]$ и $[2, 7)$ б) $(-1, 1)$ и $[0, 3]$ в) $(-\infty, 3)$ и $(0, 5)$ г) $[-4, 1)$ и $[-5, 3)$

10. Најди:

а) $[0, 3]\cap(1, 8)$ б) $(-5, 2]\cup(2, 4)$ в) $((-\infty, 3)\cap[0, +\infty))\cup(-5, 5]$

11. Неутралната pH вредност е 7. Киселите раствори имаат pH вредност помала од 7, а базните раствори имаат pH вредност поголема од 7.

Запиши ги интервалите за: а) кисели раствори б) базни раствори.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Покрај постапка за наоѓање на приближна вредност на ирационален број „процени и погоди“, постојат и други постапки кои не ги наведовме. Една од нив е Вавилонската постапка наоѓање на приближна вредност на ирационален број.

Истражи и проучи ја Вавилонската постапка и открий некои нејзини предности и недостатоци во однос на постапката „процени и погоди“.

1.10. Размери и пропорции

Размери и својства на размерите

Во математиката и во секојдневниот живот се среќаваме со проблеми во кои треба да пресметаме:

а) Колку пати една величина е поголема од друга?

б) Колкав дел од едната величина претставува другата величина?

АКТИВНОСТ

а) Како ќе пресметаш колку пати бројот 18 е поголем од бројот 6?

б) Еден сад се полни со 12 литри вода. Како ќе пресметаш колкав дел од садот зафаќаат 6 литри вода?



Количникот $a : b$ (или $\frac{a}{b}$), $b \neq 0$ на мерните броеви на две еднородни величини се вика **размер** или **однос** на тие величини.

Бројот a се вика **прв член**, а бројот b **втор член** на размерот.

Вредноста на количникот $a : b$ се вика **вредност на размерот** или **коефициент на пропорционалност** и најчесто се означува со k.

Размерот $a : b$ освен на познатиот начин (a делено со b) се чита и како „a спрема b“.

ПРИМЕР 1

Еден ѕид е премачкан со смеса од 3 дела боја и 2 дела песок. Запиши ја смесата како размер од:
а) боја спрема песок б) песок спрема боја.

а) Размерот на боја спрема песок е $3 : 2$. б) Размерот на песок спрема боја е $2 : 3$.

ЗАДАЧА 1

Лента со должина од 20 cm е разделена во размер $3 : 2$. Колкава е должината на добиените делови?

ПРИМЕР 2

Размерите $2 : 3$ и $3 : 2$ се примери на **заемно обратни размери**, бидејќи тие се разликуваат само по местата на своите членови. Производот од нивните вредности е еднаков на 1, односно $(2 : 3) \cdot (3 : 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$.

ПРИМЕР 3

За два размера велиме дека се **еднакви** ако имаат еднаква вредност. Така, на пример, размерите: $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ и $\frac{5}{6} : \frac{5}{9}$ се еднакви, бидејќи $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{2}$ и $\frac{5}{6} : \frac{5}{9} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{5} = \frac{3}{2}$, додека размерите $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ и $\frac{4}{5} : \frac{3}{6}$ не се еднакви, бидејќи $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$ и $\frac{4}{5} : \frac{3}{6} = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{3} = \frac{8}{5}$.

ПРИМЕР 4

а) Размерот $3 : 4$ е составен од два члена и го нарекуваме **прост размер**.
б) Од размерите $5 : 6$ и $6 : 8$ можеме да го запишеме **продолжениот размер** $5 : 6 : 8$, кој е составен од повеќе од два члена.
в) Со продолжениот размер $4 : 9 : 6$ се определени три прости размери: $4 : 9$, $9 : 6$ и $4 : 6$.

ПРИМЕР 5

Размерите $2 : 3$ и $4 : 6$ се еднакви. Проследи ги пресметките:

$2 : 3 = 4 : 6 = (2 \cdot 2) : (2 \cdot 3)$ и $4 : 6 = 2 : 3 = (4 : 2) : (6 : 2)$.

Што заклучи во врска со вредноста на размерот, кога неговите членови се множат или се делат со еден ист број, различен од нула?

Основно својство на размерите. Вредноста на размерот не се менува ако неговите членови се помножат или се поделат со еден ист број, различен од нула.

ПРИМЕР 6

Запиши го размерот 5 : 13 така што втор член на добиениот размер да биде бројот 52.

Ако вториот член 13 го замениме со бројот 52, тоа значи дека членот 13 сме го помножиле со бројот 4. За да остане еднаква вредноста на размерот, треба и бројот 5 да го помножиме со бројот 4. Имаме $5 : 13 = (5 \cdot 4) : (13 \cdot 4) = 20 : 52$.

ЗАДАЧА 2

Запиши го размерот така што првиот член на добиениот размер да биде бројот 1.

а) 3 : 6 б) 20 : 400 в) 70 : 28 г) 45 : 0,9 д) 0,25 : 0,07

ПРИМЕР 7

Со помош на основното својство на размерите, упрости го размерот $2\frac{1}{4} : 1\frac{2}{7}$.

$2\frac{1}{4} : 1\frac{2}{7} = \frac{9}{4} : \frac{9}{7} = \frac{1}{4} : \frac{1}{7} = \frac{7}{28} : \frac{4}{28} = 7 : 4.$

ПРИМЕР 8

Еден килограм мешан чај е составен од 350 грама индиски чај, 500 грама индонезиски чај, а остатокот е кинески чај.

а) Колкав е размерот на кинески спрема индиски чај?

б) Одреди го размерот индиски чај спрема индонезиски чај спрема кинески чај.

в) Колкав дел е индискиот чај во мешавината?

а) Количеството на кинески чај изнесува: $1000 - (350 + 500) = 150$ грама.
Размерот на кинески чај спрема индиски чај е $150 : 350 = 3 : 7$.

б) Размерот на индиски чај спрема индонезиски чај спрема кинески чај е $350 : 500 : 150 = 7 : 10 : 3$.

в) Чајот е поделен на 20 дела (7 + 10 + 3). Седум дела се индиски чај, 10 се индонезиски чај и 3 се кинески чај. Значи, делот на индиски чај е $\frac{7}{20}$.

ПРИМЕР 9

Колкаво е растојанието меѓу градовите Скопје и Кичево, ако растојанието на географска карта во размер 1 : 200 000 изнесува 55 cm?

Ако на географска карта во размер 1 : 200 000 измериме растојание од 55 cm, тогаш на 1 cm растојание на картата одговара 200 000 cm = 2 km реално растојание, па на 55 cm ќе одговараат 55 · 2 = 110 km реално растојание.

ЗАДАЧА 3

Подот на една училница е во форма на правоаголник со страни 9 метри и 6 метри. Колкава ќе биде должината и ширината на подот на цртеж во размер 1 : 300?

Пропорции и својства на пропорциите

АКТИВНОСТ

Дали се еднакви размерите 3 : 2 и 18 : 6? Образложи го твојот одговор.

Ако размерите $a : b$ и $c : d$ се еднакви, тогаш запишуваме $a : b = c : d$ и велиме дека a спрема b се однесува како c спрема d или размерот a спрема b е еднаков на размерот c спрема d.

Равенството $a : b = c : d$ се нарекува **пропорција**. Со други зборови, ако $a : b = k$ и $c : d = k$, тогаш $a : b = c : d$ е пропорција. За броевите a и c велиме дека се пропорционални на броевите b и d, соодветно. Бројот k се вика **коефициент на пропорционалност**.

ПРИМЕР 10

Провери дали следниве равенства се пропорции: а) $12 : 3 = 20 : 5$ б) $\frac{1}{4} : 3 = \frac{5}{6} : 10$

а) $12 : 3 = 20 : 5$, бидејќи $12 : 3 = 4$ и $20 : 5 = 4$

б) $\frac{1}{4} : 3 = \frac{5}{6} : 10$, бидејќи $\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$ и $\frac{5}{6} : 10 = \frac{1}{12}$

Секоја пропорција се состои од четири члена, кои од лево на десно се нарекуваат прв, втор, трет и четврти член на пропорцијата. Првиот и четвртиот член на пропорцијата се викаат **надворешни членови** на пропорцијата, додека вториот и третиот член се викаат **внатрешни членови** на пропорцијата.



ПРИМЕР 11

Во пропорцијата 3 : 15 = 5 : 25, броевите 3 и 25 се надворешни членови, додека броевите 15 и 5 се внатрешни членови.

$3 \cdot 25 = 75$ Производот на надворешните членови е еднаков на

$15 \cdot 5 = 75$ производот на внатрешните членови.

Во продолжение ќе дадеме неколку својства на пропорциите.



Основно својство на пропорциите. Производот на надворешните членови на една пропорција е еднаков на производот на внатрешните членови на пропорцијата.

ПРИМЕР 12

Во пропорцијата $7 : 21 = 2 : 6$ важи $7 \cdot 6 = 21 \cdot 2$



Ако производот на два броја различни од нула е еднаков на производот на други два броја, тогаш од тие четири броја може да се состави пропорција.

ПРИМЕР 13

Од броевите 2, 3, 6 и 9 може да се состави пропорција, бидејќи $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$.

Пропорцијата ќе гласи $2 : 3 = 6 : 9$.



Пропорцијата не се менува ако еден надворешен и еден внатрешен член, или сите нејзини членови, се помножат или се поделат со еден ист број различен од нула.

Последново својство се користи за упростување на пропорциите и тоа: кога некои од членовите на пропорцијата се дропки или децимални броеви, или кога еден внатрешен и еден надворешен член или сите членови на пропорцијата имаат заеднички множител.

ПРИМЕР 14

Упрости ја пропорцијата $\frac{2}{3} : \frac{1}{5} = x : \frac{7}{15}$.

$\frac{2}{3} : \frac{1}{5} = x : \frac{7}{15}$ Ги множиме сите членови на пропорцијата со НЗС $(3, 5, 15) = 15$.

$10 : 3 = 15x : 7$

$10 : 45 = x : 7$ Ги делиме првиот и вториот член со бројот 5.

$2 : 9 = x : 7$

Под решавање на пропорција се подразбира одредување на непознатиот член во неа, кога се познати останатите три члена.

ПРИМЕР 15

Најди го непознатиот член во пропорцијата $8 : 5 = x : 7{,}5$.

$8 : 5 = x : 7{,}5$ Го применуваме основното својство на пропорциите.
$5 \cdot x = 8 \cdot 7{,}5$
$5x = 60$
$x = 12$

ЗАДАЧА 4

Пресметај го непознатиот член x во пропорцијата:

а) $3x : 8 = 9 : 5$ б) $12 : (x + 1) = 3 : 4$ в) $3 : 4 = (7 - x) : (7 + x)$

Продолжена пропорција

ПРИМЕР 16

Ако еднаквите размерите $2 : 1$, $4 : 2$ и $8 : 4$ ги сврземе со знакот за равенство, ја добиваме пропорцијата $2 : 1 = 4 : 2 = 8 : 4$, која е пример на продолжена пропорција.

Равенство на три или повеќе размери се нарекува **продолжена пропорција**. Со други зборови, ако $a_1 : b_1 = k$, $a_2 : b_2 = k, \ldots, a_n : b_n = k$, тогаш $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$ е продолжена пропорција. За броевите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ велиме дека се пропорционални на броевите $b_1, b_2, \ldots, b_n$, соодветно. Бројот k се вика **коефициент на пропорционалност**.

Продолжените пропорции често се запишуваат како: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ или $a_1 : a_2 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : \ldots : b_n$.

ПРИМЕР 17

Состави продолжена пропорција од пропорциите $a : b = 4 : 3$, $b : c = 3 : 8$ и $c : d = 4 : 5$.

Од $c : d = 4 : 5$ наоѓаме дека $c : d = 8 : 10$, па продолжената пропорција ќе гласи
$a : b : c : d = 4 : 3 : 8 : 10$.

ЗАДАЧА 5

Најди ги x и y од продолжената пропорција $x : 4 = 6 : y = 3 : 2$.

Продолжената пропорција не се менува ако се помножат или се поделат со еден ист број различен од нула, кој било прв член и соодветниот на него втор член, или сите први членови или сите втори членови. Последното својство се користи за упростување на продолжените пропорции.

ПРИМЕР 18

Упрости ја продолжената пропорција $a_1 : a_2 : a_3 = \frac{7}{8} : \frac{3}{4} : \frac{1}{2}$

$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{7}{8} : \frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ Ги множиме сите втори членови со бројот НЗС $(8, 4, 2) = 8$.
$a_1 : a_2 : a_3 = 7 : 6 : 4$



Збирот на сите први членови на размерите кај продолжената пропорција спрема збирот на сите втори членови се однесуваат исто како и кој и да било прв член спрема неговиот соодветен втор член, односно за продолжената пропорција $a_1 : a_2 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : \ldots : b_n$ важи

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

ПРИМЕР 19

Бројот 450 раздели го на четири дела што се однесуваат како 2 : 3 : 5 : 8.

Да ги означиме бараните делови со x, y, z и w. Според условот во задачата имаме дека

$x + y + z + w = 450$ и $x : y : z : w = 2 : 3 : 5 : 8$

Оттука наоѓаме дека $x = 2k, y = 3k, z = 5k$ и $w = 8k$, каде што k е коефициентот на пропорционалност.

Според својството на продолжените пропорции добиваме дека

$2k + 3k + 5k + 8k = 450$, $18k = 450$ и $k = 25$.

Бараните делови се

$x = 2k = 2 \cdot 25 = 50$, $y = 3k = 3 \cdot 25 = 75$, $z = 5k = 5 \cdot 25 = 125$ и $w = 8k = 8 \cdot 25 = 200$.

ЗАДАЧА 6

За должините на страните на еден триаголник важи $a : b : c = 5 : 7 : 11$, а неговиот периметар е 115 cm. Колку се долги страните на триаголникот?

Права пропорционалност и обратна пропорционалност

ПРИМЕР 20

Ако 1 килограм јаболка чини 30 денари колку ќе чинат 2, 3, 4, 5, ... килограми јаболка прегледно е претставено со табелата:

Количество јаболка во килограми	1	2	3	4	5	6	7	...
Вредност во денари	30	60	90	120	150	180	210	...

Од табелата заклучуваме дека $1 : 2 = 30 : 60$, $2 : 3 = 60 : 90$, $3 : 4 = 90 : 120$ итн.

Имено, кога едната величина (количеството) ќе се зголеми 2, 3, 4, 5, ... пати, тогаш другата величина (вредноста на стоката) ќе се зголеми исто толку пати и обратно.



Велиме дека две променливи величини X и Y се наоѓаат во **правопропорционална зависност** ако размерот на кои било две произволни допуштени вредности од едната величина е еднаков на размерот на соодветните вредности од другата величина.

Величините меѓу кои постои правопропорционална зависност се викаат **правопропорционални величини**.

ПРИМЕР 21

Примери на правопропорционални величини се: периметарот на квадратот и неговата страна; тежината и волуменот на тело при постојана густина; бројот на работници и извршената работа од нив итн.

Нека X и Y се две правопропорционални величини. Ако $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ се неколку произволни допуштени вредности на величината X, а $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ се соодветните вредности на величината Y, тогаш количникот на соодветните вредности е константен број, односно имаме дека

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = k$$

Бројот k се нарекува **коефициент на пропорционалност** на правопропорционалните величини X и Y.

ПРИМЕР 22

а) Периметарот на кружницата и нејзиниот радиус се правопропорционални величини со коефициент на пропорционалност $k = 2\pi$.

б) Периметарот на рамностран триаголник е правопропорционален со должината на неговата страна со коефициент на пропорционалност $k = 3$.

ПРИМЕР 23

На технички цртеж се нацртани две кружници. Една од нив има радиус 10 cm и периметар 62,8 cm. Колкав ќе биде периметарот на другата кружница ако нејзиниот радиус е 25 cm?

Дадените величини се правопропорционални. Коефициентот на пропорционалност изнесува $k = \frac{62{,}8}{10} = 6{,}28$.

Ако го означиме со x периметарот на кружницата со радиус 25 cm, тогаш $\frac{x}{25} = 6{,}28$, од каде што пресметуваме дека $x = 157$ cm.

Периметарот на другата кружница е 157 cm.

ЗАДАЧА 7

Еден 3D принтер може да отпечати 5 модели за 2 часа. Колку модели ќе отпечати истиот принтер за 6 часа ако работи со истата брзина?

ПРИМЕР 24

Растојанието меѓу два града изнесува 120 km. Тоа може да се измине за различно време во зависност од брзината на движењето. За да ја испитаме зависноста помеѓу брзината и времето потребно за изминување на патот, ќе ја составиме следната табела:

Брзина во километри на час	5	10	15	20	30	60	120	...
Време во часови	24	12	8	6	4	2	1	...
Пат во километри	120	120	120	120	120	120	120	...

Од табелата заклучуваме дека $5 : 10 = 12 : 24$, $5 : 15 = 8 : 24$, $5 : 30 = 4 : 24$, $15 : 60 = 2 : 8$ итн.

Исто така, согледуваме дека $5 \cdot 24 = 10 \cdot 12 = 15 \cdot 8 = 20 \cdot 6 = 30 \cdot 4 = \ldots = 120 \cdot 1 = 120$.

Имено, кога едната величина (брзината) ќе се зголеми 2, 3, 4, 5, ... пати, тогаш другата величина (времето) ќе се намали исто толку пати и обратно.

Велиме дека две променливи величини X и Y се наоѓаат во **обратнопропорционална зависност** ако размерот на кои било две произволни допуштени вредности од едната величина е еднаков на обратниот размер на соодветните вредности од другата величина.

Величините меѓу кои постои обратнопропорционална зависност се викаат **обратнопропорционални величини.**

ПРИМЕР 25

Обратнопропорционални величини се: должината и ширината на правоаголникот, при постојана плоштина; притисокот и волуменот на одредено количество гас при постојана температура; број на работници и времето за кое тие завршуваат определена работа итн.

Нека X и Y се две обратнопропорционални величини. Ако $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ се неколку произволни допуштени вредности на величината X, а $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ се соодветните вредности на величината Y, тогаш производот на соодветните вредности е константен број, односно имаме дека $y_1x_1 = y_2x_2 = \ldots = y_nx_n = k$. Бројот k се нарекува **коефициент на пропорционалност** на обратнопропорционалните величини X и Y.

ПРИМЕР 26

Колку часа ќе трае полнењето на батеријата при напон од 10 волти, ако полнењето при напон од 5 волти трае 10 часа?

За полнење на батерија се користат различни напони. Колку е поголем напонот, толку пократко време е потребно за полнење, односно напонот и времето се обратнопропорционални величини. Коефициентот на пропорционалност изнесува $k = 5 \cdot 10 = 50$.

Ако го означиме со x бројот на часови за полнењето на батеријата при напон од 10 волти, тогаш $10x = 50$, $x = 5$ часа. Полнењето на батеријата при напон од 10 волти ќе трае 5 часа.

ЗАДАЧА 8

Дванаесет работници завршиле одредена работа за 10 дена. Колку дена ќе им бидат потребни на 15 работници да ја завршат истата работа ако работат со иста продуктивност?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Во едно училиште има 900 ученици и 26 професори.
   а) Запиши го односот на ученици спрема професори во упростен облик.
   б) Следната учебна година, бројот на ученици се зголемил за 60 и биле вработени 4 нови професори. Одреди го новиот однос на ученици спрема професори.
   в) Во кој однос има повеќе ученици?

2. Најди го растојанието меѓу два града, ако на географската карта во размер 1 : 300 000, тие се оддалечени 18,5 cm.

3. Запиши го продолжениот размер што се добива од простите размери: 2 : 3, 5 : 6 и 9 :10.

4. Испитај ја точноста на пропорциите:
   а) $3 : 5 = 12 : 20$ б) $4 : 5 = \frac{1}{5} : \frac{1}{4}$ в) $x^2 : y^2 = xy : \frac{y^3}{x}, x \neq 0, y \neq 0$

5. Упрости ја пропорцијата: а) $\frac{1}{6} : \frac{2}{5} = \frac{3}{8} : x$ б) $x : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} : \frac{1}{8}$ в) $\frac{3}{4} : x = \frac{2}{5} : \frac{1}{6}$

6. Пресметај ги непознатите членови во пропорцијата $2 : 3 = x : 6 = 8 : y = z : 18$

7. Состави продолжена пропорција од пропорциите: $a : b = 2 : 3$, $b : c = 6 : 5$ и $c : d = 15 : 11$.

8. Бројот 600 раздели го на делови кои се однесуваат како 1 : 3 : 6.

9. Од една оранжерија дневно се собираат 1376 жолти, црвени и бели рози. По колку рози од секоја боја се собираат ако бројот на жолти рози и црвени рози се однесуваат како 5 : 6, а бројот на црвени и бели рози се однесуваат како 4 : 7?

10. Во каква зависност се наоѓаат периметарот и страната на еден правилен шестаголник? Кој е коефициентот на пропорционалност?

11. Нека еден триаголник има страни 3 cm, 4 cm и 5 cm, а друг триаголник сличен со него има најкратка страна 6 cm. Најди ги другите страни на триаголникот.

12. Каква е зависноста на брзината со која една цевка полни базен (мерена во литри во минута) и времето на полнење на базенот (мерено во минути)? Колкав е коефициентот на пропорционалност?

13. Резервоар се празни со пумпа за 18 часа. Колку часа ќе бидат потребни за да се испразни истиот резервоар ако се вклучат 3 пумпи кои работат со иста брзина?

1.11. Процентна сметка

Претворање на проценти во децимални броеви и дропки

АКТИВНОСТ

Именувај го и означи го размерот од облик: а) 1 : 100 б) 50 : 100 в) 100 : 100.
Кој дел од целото го определува секој од наведените размери?

На секоја облека производителот става етикета на која го запишува составот на материјалот од кој е направена облеката. Материјалот од кој е сошиен фустанот на Моника бил составен од 80% свила.

$80\% = \frac{80}{100} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{4}{5}$ Свилениот состав претворен во дропка.

$80\% = \frac{80}{100} = 0{,}8$ Свилениот состав претворен во децимален број.

ПРИМЕР 1

а) Децималниот број 0,16 претворен во процент:

$0{,}16 = \frac{16}{100} = 16\%$

б) Дропката $\frac{3}{5}$ претворена во процент:

$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%$

ЗАДАЧА 1

Прецртај ги и пополни ги табелите со еквивалентни дропки, децимални броеви и проценти:

дропка	децимален број	процент
$\frac{5}{8}$		
	0,34	
		1,5%

дропка	децимален број	процент
$\frac{3}{4}$		
	0,25	
		93%

ПРИМЕР 2

Подреди ги по големина следните броеви, почнувајќи од најмалиот: 0,1; $\frac{9}{50}$; 9%

Наједноставно е броевите да ги запишеме во проценти:

$\frac{9}{50} = \frac{18}{100} = 18\%$ и $0{,}1 = \frac{10}{100} = 10\%$.

Броевите подредени по големина, почнувајќи од најмалиот се: 9%, 0,1 и $\frac{9}{50}$.

ЗАДАЧА 2

Подреди ги по големина следните броеви, почнувајќи од најголемиот:

а) 0,57, $\frac{26}{50}$, 56% б) 33%, $\frac{4}{11}$, 0,3 в) 0,5, $\frac{1}{5}$, 5%

Основна вредност, процентна вредност и процент

Како што напомнавме, размер од облик $a : 100$ се вика **процент**, и се означува со $a\%$. Во практиката е вообичаено разни успеси и неуспеси, порастот или опаѓањето на цените на стоките или на производството да се искажуваат со овие специјални видови размери. Бидејќи процентот, пред сè, е размер, сите својства на размерот важат и за процентот. Но сметањето со проценти заради својата важност го носи името **процентна сметка.**

ПРИМЕР 3

На училиштен натпревар по математика Ина точно одговорила на 17 прашања од вкупно поставените 25 прашања. На истиот натпревар Мирко дал точен одговор на 13 прашања од вкупно поставените 20 прашања. Се поставува прашањето кој од натпреварувачите бил поуспешен?

Ина одговорила точно 17 прашања од вкупно 25 прашања. Резултатот може да го изразиме со размерот 17 : 25. Аналогно, резултатот на Мирко кој се состои од 13 одговорени прашања од вкупно 20 може да го изразиме со размерот 13 : 20. Сега, одговорот на поставеното прашање се сведува на заклучокот дали размерот 17 : 25 е поголем или помал од размерот 13 : 17?

Да ги составиме следните пропорции: Ина: $17 : 25 = x : 100$ од каде што следува дека $x = 68$, и Мирко: $13 : 20 = y : 100$ од каде што следува дека $y = 65$.

Според тоа, резултатот на Ина од 17 : 25 е еквивалентен со 68 : 100, додека резултатот на Мирко од 13 : 20 еквивалентен со 65 : 100. Може да заклучиме дека Ина покажала подобар резултат на тестот бидејќи точно одговорила на 68% од поставените прашања за разлика од Мирко кој одговорил точно на 65% од поставените прашања.

Како што забележуваме од примерот, кај процентната сметка се среќаваат: константа 100, **главна вредност** S, **процент** p, и **процентен износ** P, кои се поврзани со пропорцијата $P : S = p : 100$.

Ако се познати две од вредностите во погорната пропорција, тогаш може да ја пресметаме третата вредност со помош на една од формулите: $P = \frac{S \cdot p}{100}$ или $S = \frac{100 \cdot P}{p}$ или $p = \frac{100 \cdot P}{S}$.

ПРИМЕР 4

Ирина имала 5000 денари. За колку денари се зголемило нејзиното салдо, ако добила хонорар за учество во проект во висина од 12% од вкупната сума што ја имала?

Дадени се главната вредност $S = 5000$ и процентот $p = 12$, а се бара процентниот износ P.

Според формула за пресметување на процентен износ имаме $P = \frac{S \cdot p}{100} = \frac{5000 \cdot 12}{100} = 600$.

Салдото на Ирина се зголемило за 600 денари.

ПРИМЕР 5

Цената на пар чевли е зголемена за 12%. Покачувањето на цената на чевлите изнесува 840 денари. Колкава била цената на чевлите пред покачувањето?

Дадени се процентниот износ $P = 840$ и процентот $p = 12$, а се бара главната вредност S.

Според формулата за пресметување на главна вредност имаме $S = \frac{100 \cdot P}{p} = \frac{100 \cdot 840}{12} = 7000$

Цената на чевлите пред покачувањето била 7000 денари.

ПРИМЕР 6

Компанија откупила 30 тони овошје заедно со амбалажа од 3 тони. Колкав е процентот на амбалажата?

Дадени се главната вредност $S = 30$ и процентниот износ $P = 3$, а се бара процентот p.

Според формулата за пресметување на процент имаме $p = \frac{100 \cdot P}{S} = \frac{100 \cdot 3}{30} = 10$.
Процентот на амбалажата е $p = 10$.

ПРИМЕР 7

Во една работилница се изработени 1800 ракотворби и со тоа нормата е натфрлена за 20%.
а) Колкава е нормата на ракотворби? б) За колку ракотворби е натфрлена нормата?

Дадени се процентот $p = 20$ и збирот на главната вредност и процентната вредност $S + P = 1800$, а се бара да се определат главната вредност S и процентниот износ P.

а) Имаме $S + P = S + \frac{S \cdot p}{100} = S(1 + \frac{p}{100})$. Според условот во задачата наоѓаме дека $S(1 + \frac{20}{100}) = 1800$ од каде што следува дека $\frac{120}{100}S = 1800$.
Значи, главната вредност, која всушност ја претставува нормата е $S = 1500$ ракотворби.

б) Нормата е натфрлена за процентниот износ $P = (S + P) - S = 1800 - 1500 = 300$ ракотворби.

ЗАДАЧА 3

Во која продавница принтерот е поевтин, ако во една продавница цената на принтерот се покачила за 20%, а во друга продавница, истиот принтер со иста почетна цена, се покачила два пати по 10%?

ЗАДАЧА 4

Кој е најскапиот и најевтиниот вид опрема пред покачувањето на цените дадени во табелата:

Опрема	Покачување	Нова цена во евра
Мобилен телефон	30%	200
Лаптоп	12,5%	1250
Таблет	4,5%	155
Компјутер	10%	1750

ПРИМЕР 8

Во период на летна распродажба, цената на една кошула е намалена за 12% и намалената цена изнесува 1276 денари.
а) Колкава била првобитната цена на кошулата? б) За колку е намалена цената на кошулата?

Дадени се разликата на главната вредност со процентната вредност $S - P = 1276$ и процентот $p = 12$, а се бара да се определат главната вредност S и процентниот износ P.

а) Имаме $S - P = S - \frac{S \cdot p}{100} = S(1 - \frac{p}{100})$. Според условот во задачата наоѓаме дека $S(1 - \frac{12}{100}) = 1276$ од каде што следува дека $\frac{88}{100}S = 1276$.
Значи, главната вредност, која всушност претставува првобитната цена на кошулата е $S = 1450$ кошули.

б) Цената на кошулата е намалена за процентниот износ $P = S - (S - P) = 1450 - 1276 = 174$ денари.

ЗАДАЧА 5

Во која продавница клима-уредот е поевтин, ако во една продавница клима-уредот има 30% попуст, а во друга продавница истиот клима-уред, со иста почетна цена, е намалуван три пати по 10%?

ЗАДАЧА 6

Кое е најскапото, а кое е најевтиното парче облека пред намалувањето дадено во табелата:

Парче облека	Намалување	Нова цена во денари
Фармерки	25%	1200
Џемпер	17,5%	1238
Блуза	7,5%	555
Чорапи	10%	45

ЗАДАЧА 7

Еден истражувачки тим имал годишен буџет од 2 000 000 денари. Следната година, буџетот прво е намален за 15%, а потоа покачен за 10% од новата сума.

а) Колкав е буџетот по првото намалување? б) Колкав е буџетот по покачувањето?

в) Дали конечниот буџет е поголем или помал од почетниот и за колку проценти?

Примена на процентна сметка во економија

ПРИМЕР 9

Една компанија поставила соларни панели и остварила приход од 240 000 денари од продажба на електрична енергија. Од приходот 25% потрошила за одржување на панелите, 18% за даноци и 30% за енергетско унапредување. Остатокот е профит.

а) Колку средства потрошила за одржување, даноци и енергетско унапредување, поодделно?

б) Колкав бил вкупниот трошок на компанијата? в) Колку профит остварила компанијата?

Приход претставува вкупната сума на пари што ја заработиле компанијата од продажба на електрична енергија. Според условот во задачата, компанијата остварила годишен приход од 240 000 денари.

а) Компанијата потрошила за: одржување $25\% \cdot 240\,000 = 60\,000$ денари
даноци $18\% \cdot 240\,000 = 43\,200$ денари
енергетско унапредување $30\% \cdot 240\,000 = 72\,000$ денари.

б) Вкупниот трошок на компанијата бил $60\,000 + 43\,200 + 72\,000 = 175\,000$ денари.

в) Профит или добивка е износот што останува од приходот по одземање на сите трошоци. Настанува кога приходот е поголем од трошоците.

Компанијата остварила профит од $240\,000 - 175\,000 = 65\,000$ денари.

ЗАДАЧА 8

Млада стартап-компанија развила мобилна апликација за управување со личен буџет. Апликацијата има 5000 корисници што плаќаат месечно по 120 денари. Од вкупниот приход 15% троши за маркетинг, 40% за плати и 10% за сервери и технологии. Остатокот е профит.

а) Колку изнесува месечниот приход на компанијата?
б) Колкави се трошоците за маркетинг, плати и сервери?
в) Колкав е профитот на компанијата?

ПРИМЕР 10

Една мала работилница потрошила 600 000 денари за материјали, алат и плати за изработка на ранци. Сите изработени ранци ги продала за 660 000 денари. Дополнително, платила 15% од приходот за транспорт.

а) Колку денари се платени за транспорт? б) Колкави се вкупните трошоци?
в) Дали работилницата има добивка или загуба и колкава е таа?

Загуба или губиток настанува кога трошоците се поголеми од приходот.

а) Работилницата за транспорт платила $15\% \cdot 660\,000 = 99\,000$ денари.

б) Вкупните трошоци изнесуваат $600\,000 + 99\,000 = 699\,000$ денари.

в) Работилницата има загуба бидејќи вкупните трошоци се поголеми од приходот.

Загубата изнесува $699\,000 - 660\,000 = 39\,000$ денари.

ЗАДАЧА 9

Компанија што продава уреди за домаќинство набавила серија уреди по цена од 12 000 денари по парче. Поради технички проблеми, таа морала да ги продаде уредите со загуба од 20% по парче.

а) По која цена е продаден секој уред? б) Колкава е загубата по парче?
в) Ако се продадени 50 парчиња, колкава е вкупната загуба?

Данок на додадена вредност (ДДВ) е **данок** што се пресметува на **вредноста на стоките или услугите и се додава** на вредноста на стоките или услугите во секоја фаза од производството и трговијата. Во нашата држава ДДВ е 18% на сите производи и услуги, а по исклучок некои од нив имаат повластена даночна стапка од 5%. Како функционира во пракса пресметувањето на ДДВ?

ПРИМЕР 11

Мелницата произведува брашно во вредност од 100 денари и го продава на пекарницата со 18% вклучен ДДВ за $100 + 18\% \cdot 100 = 100 + 18 = 118$ денари. Мелницата ДДВ во висина од 18 денари го уплаќа во државата.

Пекарницата го користи брашното и произведува печиво во вредност од 200 денари кое го продава на продавница со 18% вклучен ДДВ за $200 + 18\% \cdot 200 = 200 + 36 = 236$ денари. Пекарата одбива 18 денари ДДВ што го платила при купување на брашното и во државата уплаќа само $36 - 18 = 18$ денари.

Продавницата го продава печивото во вредност од 300 денари на потрошувачот со 18% вклучен ДДВ за $300 + 18\% \cdot 300 = 300 + 54 = 354$ денари. Продавницата одбива 36 денари ДДВ и уплаќа само $54 - 36 = 18$ денари.

Крајниот потрошувач го плаќа ДДВ, затоа што тој ја плаќа полната цена со ДДВ и нема право да си го одбие тој ДДВ како што можат компаниите.

Некои лекови и прехранбени продукти имаат повластена даночна стапка од 5%

ЗАДАЧА 10

Една книжарница продава учебник по цена од 600 денари без ДДВ. Стапката на ДДВ за учебници изнесува 5%.

а) Колку изнесува ДДВ-то? б) Колку изнесува крајната цена на учебникот со вклучено ДДВ?

Царината е данокот што се наплатува при увоз на стоки преку границите на една држава. Целта на царината е да се заштити домашното производство од конкуренција од странство, да се приходуваат пари во државниот буџет и да се контролира протокот на стоки.

Царината се наплатува кога се увезува стока од странство, односно кога стоката преминува граница и се внесува во една земја од друга земја.

Царината се пресметува како процент од царинската вредноста на стоката, која обично ги вклучува фактурната вредност на стоката, транспортните трошоци на стоката, осигурувањето на стоката итн. Откако ќе заврши царинењето на стоката, потрошувачот треба да плати ДДВ.

ПРИМЕР 12

Итан сака да увезе мобилен телефон од странство во вредност од 200 евра и царинска стапка од 10%. За транспорт треба да плати 10 евра, а за осигурување 5 евра. Колку вкупно треба да плати за мобилниот телефон ако ДДВ стапката за мобилни телефони изнесува 18%?

Царинската стапка изнесува 10% и треба да ја плати пресметана на збирот од фактурната вредност на стоката, транспортот и осигурувањето на стоката $10\%\ (200 + 10 + 5) = 21{,}5$ евра.

Вредноста на мобилниот телефон со платена царина изнесува $215 + 21{,}5 = 236{,}5$ евра.

На вредноста на мобилниот телефон со платена царина треба да плати ДДВ од 18%
$18\% \cdot 236{,}5 = 42{,}57$ евра.

За својот мобилен телефон Итан треба да плати вкупно $236{,}5 + 42{,}57 = 279{,}07$ евра.

ЗАДАЧА 13

Сања нарачала фритеза од странство која чини 100 евра. За транспорт треба да плати 20 евра, а за осигурување 8 евра. Царинската стапка е 15% и ДДВ стапката е 18%?

а) Колку царината треба да плати? б) Колку изнесува ДДВ-то?

в) Колку вкупно треба да плати Сања при подигање на фритезата?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Претвори ја во процент дропката: а) $\frac{17}{100}$ б) $\frac{3}{10}$ в) $\frac{5}{8}$ г) $\frac{7}{9}$
2. Претвори го во децимален број процентот: а) 12% б) 93% в) 1,5% г) 75%
3. Претвори го во дропка процентот: а) 25% б) 50% в) 78% г) 15%
4. Претвори го во процент децималниот број: а) 0,24 б) 0,99 в) 0,875 г) 0,33
5. Пресметај: а) 15% од 750 километри б) 12% од 6000 денари в) 80% од 200 литри
6. Во една паралелка 7 ученици се одлични, што претставува 20% од вкупниот број на ученици. Колку вкупно ученици има во паралелката?

7. При прием на стока од 23 тони констатирано е 0,5% оштетување при транспорт. Колку килограми стока е оштетено?

8. Во еден супермаркет секоја среда има намаление од 15% на прехранбените артикли. Колку пари ќе заштеди Марија ако таа купи артикал кој чини 102 денари?

9. Годишниот наталитет во една држава е 0,3%. Определи го бројот на жители во државата ако се знае дека таа пред 3 години броела 40 милиони жители?

10. Сениха купила фармерки на попуст од 15% и така заштедела 360 денари. Кога Лина отишла да купи од истите фармерки, попустот бил 25%. Колку денари платила Лина?

11. Компанија продава технички уред по цена од 60 000 денари. На почетокот давала попуст од 20%. Подоцна, ја покачила цената на намалениот износ за 25%.
    а) Колкава е цената по првиот попуст? б) Колкава е цената по покачувањето?
    в) Дали новата цена е иста, поголема или помала од почетната?

12. Јана е машински инженер и работи во фабрика за автомобили. Нејзината бруто-плата изнесува 60 000 денари месечно. Од нив 18% одат за персонален данок, 8% за пензиско осигурување и 5% за здравствено осигурување.
    а) Колку денари се одбиваат вкупно од нејзината плата?
    б) Колку е нејзината нето-плата (по одбивање на придонеси)?
    в) Ако штеди 10% од нето-платата секој месец, колку ќе заштеди за една година?

13. Дигитална маркетинг агенција остварила приход од 500 000 денари. Притоа 60% од приходот се од онлајн рекламирање, 25% од SEO оптимизација и остатокот од дизајн и консалтинг услуги. Од приходот од онлајн рекламирање 30% биле за плати на вработени, 15% за реклама на платформи (како Google, Meta итн.), а остатокот бил профит.
    а) Колкав е приходот од секоја услуга?
    б) Колку денари од онлајн рекламирањето потрошила на плати?
    в) Колку денари од онлајн рекламирањето се профит?
    г) Колкав е вкупниот профит ако профитот од другите услуги (SEO и дизајн) изнесувал 40% од нивниот приход?

14. Компанија продава два вида електронски уреди, тип А и тип В. Од уредот од тип А продадени се 80 парчиња со профит од 25%. Набавната цена била 10 000 денари по парче. Од уредот од тип В продадени се 60 парчиња со загуба од 15%. Набавната цена била 12 000 денари по парче.
    а) Колкав е профитот од уредите од тип А? б) Колкава е загубата од уредите од тип Б?
    в) Дали фирмата остварила профит или има загуба?

15. Еден лек се продава по крајна цена од 525 денари. Стапката на ДДВ за лекови е 5%.
    а) Колку изнесува основната цена без ДДВ? б) Колку изнесува ДДВ-то?

16. Јована нарачала правосмукалка од странство со фактурна вредност 150 евра. За транспорт треба да плати 25 евра, а за осигурување 10 евра. Царинска стапка изнесува 10%, а ДДВ стапката изнесува 18%.
    а) Колку царината треба да плати? б) Колку изнесува ДДВ-то?
    в) Колку вкупно треба да плати Јована при подигање на правосмукалката?

1.12. Просто и сложено тројно правило

Просто тројно правило

АКТИВНОСТ

Колку килограми брашно е потребно за 75 килограми леб ако од 4 килограми брашно се добиваат 5 килограми леб?

Својствата на пропорциите и пропорционалните величини наоѓаат голема примена во решавањето на задачи од секојдневната практика. Тоа се задачи во кои се дадени вредноста на една величина и соодветната вредност на друга величина, со која таа величина е правопропорционална или обратнопропорционална, а се бара да се одреди онаа вредност на едната од величините што одговара на познатата вредност на другата величина. Задачите од ваков вид се викаат задачи од **просто тројно правило**.

ПРИМЕР 1

Ана платила 1260 денари за 50 тетратки. Колку тетратки може да купи Ана за 3780 денари?

Во задачата се појавуваат две величини, бројот на тетратките и сумата на денари платена за нив.

Бидејќи Ана платила 1260 денари за 50 тетратки ќе запишеме:

1260 денари 50 тетратки

Ако со x го означиме бараниот број на тетратки, слично како погоре може да запишеме:

3780 денари x тетратки

Бидејќи со поголема сума денари, Ана може да купи повеќе тетратки, величините се правопропорционални, па стрелките во шемата се со иста насока:

↑1260 денари ↑50 тетратки

↑3780 денари x тетратки

Според шемата ја составуваме пропорцијата $x : 50 = 3780 : 1260$ од каде што наоѓаме дека $x = \frac{50 \cdot 3780}{1260} = 150$ тетратки. Значи, Ана може да купи 150 тетратки за 3780 денари.

Согледуваме дека постапката на решавање на задачи со просто тројно правило се состои во следните чекори:

- ✓ Условот во задачата го запишуваме во првиот ред, а барањето во вториот ред.
- ✓ Стрелките се стават во иста насока ако величините се правопропорционални, а во обратна насока ако величините се обратнопропорционални, при што првата стрелка почнува од непознатиот член.
- ✓ Според насоката на стрелките составуваме пропорција од која го пресметуваме непознатиот член.

ЗАДАЧА 1

За 12 литри млеко треба да се платат 576 денари. Колку денари треба да се платат за 16,5 литри млеко?

ПРИМЕР 2

Од некое количество памучен конец може да се исткае 92 m платно широко 140 cm. Колку метри платно ќе се исткае од истото количество памучен конец ако платното е широко 80 cm?

Двете величини: должината и ширината на платното што може да се исткае од истото количество памучен конец се обратнопропорционални една на друга. Затоа, стрелките во шемата се во обратна насока:

↑ 92 m платно	| 140 cm широко
↑ x m платно	↓ 80 cm широко

Според шемата ја составуваме пропорцијата $x : 92 = 140 : 80$, од каде што наоѓаме дека $x = \frac{92 \cdot 140}{80} = 161$ метар. Значи, од истото количество памучен конец ќе се исткаат 161 m платно широко 80 cm.

ЗАДАЧА 2

Тројца работници треба да завршат една работа за 16 дена. За колку време истата работа, под исти услови, ќе ја завршат 4 работници?

Примена на просто тројно правило при претворање на валути

Повеќето држави имаат сопствени парични единици наречени **валути**. Кога патуваме во друга држава или кога споредуваме цени, треба да ги претвориме од една во друга валута.

Курсот на валутата ни кажува колку парични единици од една валута ќе добиеме за 1 парична единица од другата валута.

ПРИМЕР 3

Курсот на 1 американски долар (USD) = 54 денари (MKD). Смени:
а) 250 долари во денари б) 3200 денари во долари

Претворањето од една во друга валута може да го направиме со примена на просто тројно правило. Бидејќи за поголема парична вредност во една валута, добиваме поголема парична вредност во друга валута, величините се правопропорционални, па стрелките во шемата се со иста насока:

а)

↑ 1 долар	↑ 57 денари
↑ 250 долари	↑ x денари

Според шемата ја составуваме пропорцијата $x : 57 = 250 : 1$ од каде што добиваме дека $x = 57 \cdot 250 = 14\,250$ денари.

б)

↑ 57 денари	↑ 1 долар
↑ 3200 денари	↑ x долари

Од шемата наоѓаме дека $x : 1 = 3200 : 57$ од каде што добиваме дека $x = \frac{3200}{57} = 56{,}14$ долари.

Да забележиме дека добиените странски парични вредности ги заокружуваме на две децимални места, а македонските парични вредности ги заокружуваме на цел број.

ЗАДАЧА 3

Пресметај и одговори на прашања, според курсната листа дадена со табелата:

Валута	Кратенка	Вредност на 1 единица
Евро	EUR	62 денари
Американски долар	USD	57 денари
Британска фунта	GBP	75 денари
Швајцарски франк	CHF	67 денари

а) Ако патуваш во САД и имаш 20 000 долари, колку американски долари ќе добиеш?
б) Ако имаш 15 000 денари, дали ќе можеш да купиш часовник во Германија кој чини 220 евра?
в) Во Велика Британија ти се допадна јакна која чини 95 фунти. Колку денари треба да смениш за да ја купиш јакната?
г) Ски-карта во швајцарски скијачки центар чини 150 швајцарски франци.

Претвори го износот во денари.

ЗАДАЧА 4

Матеј сака да смени 200 австралиски долари (AUD) во македонски денари (MKD). Треба да плати 30 австралиски долари провизија и остатокот го менува според курсот 1 AUD = 34,91 MKD. Колку денари ќе добие Матеј?

Сложено тројно правило

Во практиката честопати наидуваме на задачи со три или повеќе пропорционални величини. Имено, ако се дадени вредности на три и повеќе величини, тогаш соодветната непозната вредност се одредува со **сложено тројно правило**. За сложеното тројно правило важат истите правила за составување на шемата според која ги составуваме пропорциите за пресметување на непознатата величина.

ПРИМЕР 4

За изведување на тунел долг 1600 метри, широк 4 метри и висок 6 метри, потрошени се 640 000 евра. Колку евра се потребни за изведување на тунел долг 1000 метри, широк 6 метри и висок 8 метри, под истите услови за изведување?

Сите величини, должината, ширината, висината и потрошувачката за изведување на тунелот, се правопропорционални една на друга, па затоа сите стрелки во шемата се исто насочени:

↑1600 m долг	↑4 m широк	↑6 m висок	↑640 000 евра
1000 m долг	6 m широк	8 m висок	x евра

Според насоката на стрелките следува дека $x = \frac{640\,000(1000 \cdot 6 \cdot 8)}{1600 \cdot 4 \cdot 6} = 800\,000$ евра.

Значи, за изведување на тунел долг 1000 метри, широк 6 метри и висок 8 метри при истите услови за изведување, потребни се 800 000 евра.

ЗАДАЧА 5

Ако 4 робота за 3 часа составуваат 120 играчки, колку играчки ќе состават 6 робота за 5 часа?

ПРИМЕР 5

Група од 20 работници работеле 5 дена по 8 часа и набрале 20 000 килограми праски. Колку дена се потребни за група од 30 работници кои ќе работат по 5 часа на ден, да наберат 60 000 килограми праски?

Првата поставена стрелка секогаш започнува од x и е насочена нагоре. Потоа согледуваме дека ако 20 работници ја завршиле работата за 5 дена, тогаш 30 работници ќе ја завршат работа за помалку денови (обратнопропорционални величини).

Понатаму, ако работат по 8 часа, работата ќе ја завршат за 5 дена, а ако работат по 5 часа, работата ќе ја завршат за повеќе денови (обратнопропорционални величини).

На крај, ако 20 000 килограми праски се набрани за 5 дена, тогаш 60 000 килограми праски ќе се наберат за повеќе денови (правопропорционални величини).

20 работници	5 дена	8 часа	20 000 килограми
30 работници	x дена	5 часа	60 000 килограми

Според насоката на стрелките следува дека $x = \frac{5 \cdot 20 \cdot 8 \cdot 60\,000}{30 \cdot 5 \cdot 20\,000} = 16$ дена.

Значи, потребни се 16 дена, за група од 30 работници кои ќе работат по 5 часа на ден, да наберат 60 000 килограми праски.

ЗАДАЧА 6

Ако 6 машини со моќност 1200 киловати може да завршат определена работа за 8 дена, со колкава моќност треба да бидат машините за да може 4 машини да ја завршат истата работа за 6 дена?

ИСТРАЖУВАЊЕ

Со твоето семејство треба да патуваш во Германија, Канада, Нов Зеланд и Јапонија. Имате буџет од 750 000 денари.

а) Направи план за патувањето и предвиди ги трошоците во валутата на секоја од државите (евро, канадски долар, новозеландски долар и јапонски јен). Во планот вклучи трошоци за: авионски билети, сместување, храна, влезници во музеи, забавни паркови и друго.

б) Истражи преку интернет и најди курсна листа за односот на денарот и валутата на секоја од наведените држави.

в) Пресметај ги вкупните трошоци за секоја држава во денари.

г) Состави табела во која ќе ги прикажеш трошоците во валутата на секоја од државите и трошоците претворени во денари.

д) Според твојата пресметка, дали вашиот расположлив буџет е доволен за да патувате во сите четири држави?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Од 20 килограми шеќерна репка се добиваат 1,5 килограми шеќер. Колку килограми шеќер ќе се добие од 768 килограми шеќерна репка?

2. Во текот на работниот ден 4 работници ископале канал долг 12 метри. Колку работници се потребни за да се ископа канал долг 18 метри во текот на работниот ден?

3. Шест еднакви цевки наполнуваат еден базен за 4,5 часа. За колку часа ќе го наполнат истиот базен 5 такви цевки?

4. Со еден полно буре со вода можат да се наполнат 24 шишиња од 0,75 литри. Колку шишиња од 1 литар може да се наполнат од истото полно буре?

5. Курсот на македонскиот денар (MKD) и хрватската куна (HRK) е 1 MKD = 8 HRK.
   а) Колку куни ќе се добијат за 3750 денари?
   б) Колку денари ќе се добијат за 200 хрватски куни?

6. Шест соларни панели за 5 часа произведуваат 90 kw/h електрична енергија. Колку електрична енергија ќе произведат 10 панели за 8 часа?

7. Четири машини работат 6 часа и произведуваат 1200 автомобилски делови. Колку автомобилски делови ќе произведат 6 машини за 8 часа?

8. Шест 6 цевки со ист дијаметар можат да испразнат резервоар за 8 минути ако притисокот е 12 бари. За колку време ќе се испразни истиот резервоар ако се вклучат 4 цевки, но со притисок од 18 бара?

9. Четири сензори при напон од 5 волти се активираат за 12 секунди. Колку време ќе треба да се активираат 8 сензори при напон од 10 волти?

1.13. Делбена сметка

АКТИВНОСТ

Тројца другари платиле 1500 денари за ручек. По колку денари треба да плати секој од нив?

Во практиката често се сретнуваме со задачи во кои одредена величина или множество треба да се раздели на делови кои се право или обратнопропорционални на однапред зададени броеви. Според тоа, ќе разликуваме **правопропорционално делење** и **обратнопропорционално делење**.

ПРИМЕР 1

Во научноистражувачки проект хонорар од 150 000 денари се дели на двајца соработници во однос 2 : 3. По колку денари ќе добие секој соработник?

Да ги означиме со x и y висините на хонорарите на соработниците во проектот.

Според условот за поделба на хонорарите имаме $x : y = 2 : 3$.

Со примена на својствата на пропорциите имаме дека $x = 2k$ и $y = 3k$.

Од условот за вкупниот износ на хонорарот се добива дека $2k + 3k = 150\,000$, $5k = 150\,000$, $k = 30\,000$.

Оттука наоѓаме дека $x = 2k = 2 \cdot 30\,000 = 60\,000$ и $y = 3k = 3 \cdot 30\,000 = 90\,000$.

Едниот соработник ќе добие 60 000 денари, а другиот соработник 90 000 денари.

ЗАДАЧА 1

Големините на два комплементни агли α и β се во однос 2 : 7. Колкави се аглите?

ПРИМЕР 2

Раздели го бројот 370 на три дела, кои ќе бидат правопропорционални на броевите 2, 3 и 5.

Бројот 370 треба да се раздели на три дела (собироци) кои ќе бидат во однос 2 : 3 : 5.

Ако собироците ги означиме со x, y и z, тогаш $x : y : z = 2 : 3 : 5$ од каде што следува дека $x = 2k$, $y = 3k$ и $z = 5k$.

Според условот во задачата $x + y + z = 370$, што значи $2k + 3k + 5k = 370$, $10k = 370$, $k = 37$.

Оттука наоѓаме дека $x = 2k = 2 \cdot 37 = 74$, $y = 3k = 3 \cdot 37 = 111$ и $z = 5k = 5 \cdot 37 = 185$.

Првиот собирок е 74, вториот собирок е 111 и третиот собирок е 185.

ЗАДАЧА 2

Еден компјутер има 18 гигабајти слободна RAM-меморија која треба да се подели меѓу три апликации во однос 2 : 3 : 4. Колку гигабајти RAM-меморија ќе добие секоја апликација?

ПРИМЕР 3

Пат долг 540 километри треба да се подели на четири делови кои се правопропорционални на броевите $\frac{2}{3}, 1\frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ и $\frac{3}{4}$. Патот треба да се подели на четири делови кои се во однос $\frac{2}{3} : 1\frac{1}{2} : \frac{5}{6} : \frac{3}{4}$.

Ако бараните делови од патот ги означиме со x, y, z и w, ја добиваме продолжената пропорција $x : y : z : w = \frac{2}{3} : 1\frac{1}{2} : \frac{5}{6} : \frac{3}{4}$ од каде што следува $x = \frac{2}{3}k, y = 1\frac{1}{2}k, z = \frac{5}{6}k$ и $w = \frac{3}{4}k$.

Бидејќи $x + y + z + w = 540$, наоѓаме дека $\frac{2}{3}k + 1\frac{1}{2}k + \frac{5}{6}k + \frac{3}{4}k = 540$, $\frac{45}{12}k = 540$, $k = 144$.

Според тоа, за деловите од патот добиваме $x = \frac{2}{3}k = \frac{2}{3} \cdot 144 = 96$, $y = 1\frac{1}{2}k = \frac{3}{2}k = \frac{3}{2} \cdot 144 = 216$, $z = \frac{5}{6}k = \frac{5}{6} \cdot 144 = 120$ и $w = \frac{3}{4}k = \frac{3}{4} \cdot 144 = 108$.

Тоа значи дека, првиот дел од патот е долг 96 километри, вториот 216 километри, третиот 120 километри и четвртиот 108 километри.

ЗАДАЧА 3

Едно домаќинство потрошило 90 kwh електрична енергија за еден месец. Притоа, $\frac{2}{3}$ од електричната енергија ги потрошило за греење, $\frac{1}{6}$ за осветление и остатокот за работа на електричните уреди. Колку киловат-часови електрична енергија се потрошени на секоја намена?

ПРИМЕР 4

Хемиски раствор од 630 милилитри е поделен на три лаборатории. Количествата раствор поделени на првата и втората лабораторија се во однос 5 : 6, а количествата раствор поделени на втората и третата лабораторија се во однос 2 : 3. Колку милилитри раствор ќе добие секоја лабораторија?

Да ги означиме количествата раствор поделени на првата, втората и третата лабораторија со x, y и z. Тогаш, согласно со условот во задачата имаме $x : y = 5 : 6$, $y : z = 2 : 3$ и $x + y + z = 630$.

Потребно е да ги трансформираме првиот и вториот однос така што во двата односи кон y да одговара еден ист број. Бидејќи НЗС(6, 2) = 6, добиваме $x : y = 5 : 6$, $y : z = 6 : 9$.

Оттука ја добиваме продолжената пропорција $x : y : z = 5 : 6 : 9$.

Понатаму, продолжувајќи како и претходно добиваме:

$x = 5k$, $y = 6k$ и $z = 9k$

$5k + 6k + 9k = 630$, $20k = 630$, $k = 31{,}5$

$x = 5k = 5 \cdot 31{,}5 = 157{,}5$; $y = 6k = 6 \cdot 31{,}5 = 189$ и $z = 9k = 9 \cdot 31{,}5 = 283{,}5$.

Првата лабораторија добила 157,5 милилитри раствор, втората 189 милилитри раствор и третата 283,5 милилитри раствор.

ЗАДАЧА 4

Тројца работници заработиле 257 845 денари. По колку денари ќе добие секој од нив, ако деловите на првиот и вториот работник се однесуваат како 4 : 5, а деловите на третиот и првиот работник се однесуваат како 2 : 3?

ПРИМЕР 5

Андреј, Јусуф и Иван се на возраст од 5, 8 и 12 години. Тие ја поделиле сумата од 122 500 денари обратнопропорционално на нивната возраст. По колку денари добил секој од нив?

Сумата од 122 500 денари треба да се раздели на три дела, кои ќе бидат во однос $\frac{1}{5} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12}$.

Ако деловите ги означиме со x, y и z, тогаш $x : y : z = \frac{1}{5} : \frac{1}{8} : \frac{1}{12}$ односно $x : y : z = 24 : 15 : 10$.

Оттука, наоѓаме дека $x = 24k$, $y = 15k$ и $z = 10k$

Според условот $x + y + z = 122\,500$, добиваме дека $24k + 15k + 10k = 122\,500$, $49k = 122\,500$, $k = 2500$. Така, деловите на кои треба да се подели сумата изнесуваат

$x = 24k = 24 \cdot 2500 = 60\,000$, $y = 15k = 15 \cdot 2500 = 37\,500$ и $z = 10k = 10 \cdot 2500 = 25\,000$.

Андреј добил 60 000 денари, Јусуф добил 37 500 денари и Иван добил 25 000 денари.

ЗАДАЧА 6

Три општини изградиле заеднички спортски терен. Трошоците за изградбата изнесувале 25 800 000 денари. Едната општина е оддалечена 3 km од спортскиот терен, другата 4 km, а третата 7,5 km. Трошоците за изградбата ги поделиле обратно пропорционално на оддалеченоста од теренот. По колку денари платила секоја општина?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Раздели го бројот 1860 на три дела, кои се:
   а) правопропрционални на броевите 2, 3 и 5 б) обратнопропорционални на броевите 2, 3 и 5.
2. Еден тип месинг е легура од бакар, цинк и олово кои се во однос 65 : 34 : 3. Колкава е масата на секој метал во месинг со маса 456 килограми?

3. Сумата од 27 200 денари да се подели на три лица правопропорционално на нивната возраст која изнесува 20 години, 32 години и 40 години. По колку денари ќе добие секој од нив?

4. Сумата од 1 092 000 денари да се подели на три компании, така што секоја следна компанија ќе добие 20% повеќе од претходната. По колку денари ќе добие секоја компанија?

5. Сумата од 135 500 денари да се подели на три лица, така што секое следно лице ќе добие 10% помалку од претходното. По колку денари ќе добие секое лице?

6. Раздели го бројот 1080 на три дела, кои се однесуваат како $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$.

7. Марија подготвила семеен ручек за кој потрошила 2820 денари. Притоа трошоците за подготовка на супата, главното јадење и салатата се однесуваат како $5 : 8\frac{1}{3} : 6{,}25$. Пресметај ги трошоците за подготовка на супата, главното јадење и салатата.

8. На државниот натпревар по математика Бојан освоил 85 бодови и бил петти, Мајлинда освоила 81 бод и била шеста, а Марко освоил 77 бодови и бил седми. Комисијата одлучила да им подели 33 200 денари правопропорционално со бројот на освоени бодови. Колкава парична награда добил секој од учениците?

9. За едно училиште се донирани 15 600 евра за градежни зафати на покривот, оградата и фискултурната сала. Средствата донирани за зафати на покривот и за зафати на оградата се во однос 4 : 5, а средствата донирани за зафати на оградата и за зафати на фискултурната сала се во однос 6 : 7. Колку средства се донирани за секој градежен зафат?

1.14. Сметка на смеси

АКТИВНОСТ

Цената на сиренето во еден маркет е 660 денари за килограм, во друг маркет е 680 денари за килограм, а во трет маркет е 720 денари за килограм.

Колкава е просечната цена на сиренето по килограм?

Сметката на смеси се користи кога со мешање на два или повеќе сорти стока се добива нова сорта со одредени карактеристики. При мешањето на стоките, ако се познати цените на стоките кои се мешаат и цената на измешаната стока, може да го определиме односот во кој треба да се мешаат стоките. Основниот принцип при мешањето на стока со различни квалитети е при продажбата на измешаната стока да се добие во вредност исто толку колку што ќе се добие ако стоката не се меша и се продава по претходната цена.

ПРИМЕР 1

Дадени се стоки од различни квалитети, една по цена од 48 денари за килограм и друга по цена од 30 денари за килограм. На пазарот се бараат 360 килограми стока со нов квалитет која ќе се продава по 40 денари за килограм. По колку килограми треба да се земе од секоја стока?

Да го означиме со x бараното количество од стоката што се продава по цена од 48 денари за килограм, а со y бараното количество стока што се продава по цена од 30 денари за килограм. Тогаш имаме дека

$$48x + 30y = 40(x + y)$$
$$48x - 40x = 40y - 30y$$
$$8x = 10y$$
$$x : y = 10 : 8$$

Ова значи дека 10 килограми од стоката x треба да се меша со 8 килограми од стоката y.

Со примена на својствата на пропорциите имаме дека $x = 10k$ и $y = 8k$.

Од условот за бараното количество стока се добива дека $10k + 8k = 360$, $18k = 360$, $k = 20$.

Оттука наоѓаме дека $x = 10k = 10 \cdot 20 = 200$ и $y = 8k = 8 \cdot 20 = 160$.

Треба да се земат 200 килограми од стоката што се продава по цена од 48 денари за килограм и 160 килограми од стоката што се продава по цена од 30 денари за килограм.

ПРИМЕР 2

По колку грама злато треба да се земе од златни предмети со финост од 80% и 90% за да се добијат 115 грама злато со финост од 86%?

Да го означиме со x бараното количество злато од предметот со финост од 80%, а со y бараното количество злато од предметот со финост од 90%. Тогаш имаме дека

$$\frac{80}{100}x + \frac{90}{100}y = \frac{86}{100}(x + y)$$
$$80x + 90y = 86(x + y)$$
$$80x - 86x = 86y - 90y$$
$$6x = 4y$$
$$x : y = 4 : 6$$

Со примена на својствата на пропорциите имаме дека $x = 4k$ и $y = 6k$.

Од условот за бараното количество злато се добива дека $4k + 6k = 115$, $10k = 115$, $k = 11{,}5$.

Оттука наоѓаме дека $x = 4k = 4 \cdot 11{,}5 = 46$ и $y = 6k = 6 \cdot 11{,}5 = 69$.

Според тоа, треба да се земат 46 грама злато од предметот со финост од 80% и 69 грама злато од предметот со финост од 90%.

ЗАДАЧА 1

Во една билна аптека се продава чај од камилица по цена од 75 денари за килограм и чај од нане по цена од 55 денари по килограм. За потребите на аптеката направена е мешавина од двата вида чај. По колку килограми треба да се земе од секој вид чај за да се добие 120 килограми мешавина која ќе се продава по цена од 68 денари за килограм?

ПРИМЕР 3

Нека се дадени три квалитети стока кои се продаваат по 40, 44 и 50 денари за килограм. Со мешање на овие три квалитети стока треба да се добијат 480 килограми стока што ќе се продава

по 45 денари за килограм и притоа да има стоки со еднакви количества од првите два квалитети. По колку килограми треба да се земе од секоја стока?

Да ги означиме со x, y и z бараните количества на стоките што се продаваат по цена од 40, 44 и 50 денари за килограм. Тогаш имаме дека

$$40x + 44y + 50z = 45(x + y + z)$$
$$40x + 44y + 50z = 45x + 45y + 45z$$
$$5z = 5x + y$$

Заради условот во задачата, да има исти количества стока од првите два квалитети, ставаме $x = y$. Така добиваме дека $5z = 6y$ и $5z = 6x$, што значи дека $z : y = 6 : 5$ и $z : x = 6 : 5$

од каде што ја добиваме продолжената пропорција $x : y : z = 5 : 5 : 6$.

Со примена на својствата на продолжената пропорција имаме дека $x = 5k$, $y = 5k$ и $z = 6k$.

Од условот за бараното количество стока се добива дека $5k + 5k + 6k = 480$, $16k = 480$, $k = 30$.

Оттука наоѓаме дека $x = 5k = 5 \cdot 30 = 150$, $y = 5k = 5 \cdot 30 = 150$ и $z = 6k = 6 \cdot 30 = 180$.

Според тоа, треба да се земат 150 килограми од стоката што се продава по цена од 40 денари за килограм, исто толку од стоката што се продава по цена од 44 денари за килограм и 180 килограми од стоката што се продава по цена од 50 денари за килограм.

ПРИМЕР 4

Нека се дадени 75%, 25% и 15% воден раствор на оцетна киселина. Со мешање на трите водени раствори на оцетна киселина треба да се добијат 98 литри воден раствор на оцетна киселина со концентрација од 35% и притоа да има исто количество 75% и 25% воден раствор на оцетна киселина. По колку литри треба да се земе од секој вид воден раствор?

Да ги означиме со x, y и z бараните количества на воден раствор со концентрации од 75%, 25% и 15%, соодветно. Тогаш имаме дека

$$\frac{75}{100}x + \frac{25}{100}y + \frac{15}{100}z = \frac{35}{100}(x + y + z)$$
$$75x + 25y + 15z = 35x + 35y + 35z$$
$$2z = 4x - y$$

Заради условот во задачата, да има исти количества од првите два водени раствори, ставаме $x = y$. Така добиваме дека $2z = 3y$ и $2z = 3x$, што значи дека $z : y = 3 : 2$ и $z : x = 3 : 2$

од каде што ја добиваме продолжената пропорција $x : y : z = 2 : 2 : 3$.

Со примена на својствата на продолжената пропорција имаме дека $x = 2k$, $y = 2k$ и $z = 3k$.

Од условот за бараното количество воден раствор се добива дека $2k + 2k + 3k = 98$, $7k = 98$, $k = 14$.

Оттука наоѓаме дека $x = 2k = 2 \cdot 14 = 28$, $y = 2k = 2 \cdot 14 = 28$ и $z = 3k = 3 \cdot 14 = 42$.

Според тоа, за да се добијат 98 литри од 35% воден раствор на оцетна киселина, треба да се измешаат 28 литри 75% воден раствор, 28 литри 25% воден раствор и 42 литри 15% воден раствор на оцетна киселина.

ЗАДАЧА 2

Дванаесет литри 20% алкохолен раствор се меша со 15 литри 15% алкохолен раствор и 10 литри 25% алкохолен раствор. Колку процентен алкохолен раствор се добива?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Во едно училиште просечната тежина на момчињата е 54 килограми, а на девојчињата 48 килограми. Најди го бројот на момчиња и девојчиња во клас од 30 ученици со просечна тежина од 51,6 килограми.

2. Се мешаат две сорти грашок од по 180 и 250 денари за килограм за да се добие грашок кој ќе чини 200 денари за килограм. Во кој однос треба да се измешаат двете сорти за да се добие мешавина со бараната цена?

3. Колку литри 40% алкохолен раствор треба да измешаме со 100% алкохол за да се добијат 52 литри 70% алкохолен раствор.

4. Во еден сад се мешаат 10 литри вода загреана на 90°C, 14 литри вода загреана на 72°C и 20 литри вода загреана на 45°C. Колкава е температурата на добиената мешавина?

5. Еден златар меша сребро со финост 60% и сребро со финост 90% и добива 600g сребро со финост 85%. По колку грама треба да земе од секој вид сребро?

6. Се мешаат две сорти грав од по 180 и 250 денари за килограм за да се добие грав кој ќе чини 200 денари за килограм. Во кој однос треба да се измешаат двете сорти за да се добие мешавина со бараната цена?

7. Една продавница има три сорти кафе: 5 килограми од по 25 денари, 7 килограми од по 30 денари и 6 kg од по 35 денари. Колкава ќе биде цената на кафето што ќе се добие со мешање на трите сорти?

8. Се мешаат три вида алкохолен раствор: 5 литри со јачина од 45%, 8 литри со јачина од 33% и 15 литри со јачина од 20%. Колкава е јачината на добиениот раствор?

1.15. Каматна сметка

Платата и надоместоците на платата, пензиите, заштедите, најчесто се парични средства кои се отстапени од граѓаните на банката на определен временски период. Исто така, често пати граѓаните имаат потреба да позајмат парични средства од банката, на определен временски период. И во двата случаи, заради користењето на паричните средства, се плаќа одреден процент од износот.

Доколку се вложуваат средства во банка, банката е **должникот**, а вложувачот е **доверителот**. Доколку, пак, се подига кредит, тогаш банката е доверителот, а корисникот на заемот е должникот.

Каматата претставува процентен износ од вложената сума, односно од позајмената сума, како паричен надомест што должникот му го плаќа на доверителот, односно како цена за користење на позајмената сума. Каматата може да се пресметува дневно, месечно, годишно итн. Ние ќе пресметуваме со годишна каматна стапка.

Износот на вложената сума, односно на позајмената сума, се нарекува **главнина** или **основна вредност**.

Периодот за кој е вложена сумата пари, односно за кој е позајмена сумата пари е **времето** за кое се пресметува каматата.

Висината на каматата што се остварува за единица време е пропорционална со главнината, односно претставува некој процент од главнината, наречен **каматна стапка.**

Според начинот на кој се пресметува каматата разликуваме **проста каматна сметка** и **сложена каматна сметка.**

Проста каматна сметка

АКТИВНОСТ

Илина му позајмила на Димитар 10 000 денари. Притоа се договориле Димитар да го врати заемот за 1 година, а за надомест да ѝ исплати дополнителни 15% од позајмените пари.

Колку пари треба да ѝ врати Димитар на Илина?

Да претпоставиме дека сме вложиле 30 000 денари со 4% проста каматна стапка за период од 5 години. Секоја година ќе добиваме 4% од вложените 30 000 денари, односно 4% од $30\,000 = \frac{4}{100} \cdot 30\,000$. Така за 5 години ќе добиеме камата од $\frac{4}{100} \cdot 30\,000 \cdot 5 = 6000$ денари.

Камата ја означуваме со i и ја пресметуваме по формулата: $i = \frac{Kpt}{100}$, каде што K е главнината, p е каматната стапка, а t е времето за кое ги вложуваме парите.

ПРИМЕР 1

Јусуф вложил 200 000 денари во банка на 3 години и добил камата во износ од 18 000 денари. Пресметај ја простата каматната стапка.

Според условот во задачата главнината $K = 200\,000$ денари, времето $t = 3$ години и каматата $i = 18\,000$ денари.

Според формулата за пресметување на камата имаме:

$$18\,000 = \frac{200\,000 \cdot p \cdot 3}{100}$$

$$18\,000 = 6000 \cdot p$$

$$p = 3\%.$$

Како што можеше да забележиш од примерите, простата камата се пресметува само на главнината.

ЗАДАЧА 1

а) Колкава камата ќе донесе капитал од 34 500 денари, вложени во банка за време од 4 години, со каматна стапка 8%?

б) Која вложена сума ќе донесе камата од 9600 денари, за време од 8 години, со каматна стапка од 5%?

в) Колку години треба да биде вложен основен капитал од 54 000 денари, за банката да исплати камата од 6480 денари, со каматна стапка од 6%?

Сложена каматна сметка

Ако каматата што ја донесува главнината за определено време ја додадеме на главнината, така што и каматата да донесува камата, тогаш велиме дека станува збор за **сложена каматна сметка**.

Ако вложиме сума од 2000 денари со сложена каматна стапка од 3%, тогаш на крајот од годината ќе добиеме камата 3% од 2000 денари, односно $\frac{3}{100} \cdot 2000 = 60$ денари.

Значи, на крајот од првата година ќе имаме $2000 + 60 = 2060$ денари.

По втората година ќе добиеме 3% од 2060 денари $\frac{3}{100} \cdot 2060 = 61{,}80$ денари.

На крајот од втората година ќе имаме $2060 + 61{,}80 = 2121{,}80$ денари.

По третата година ќе добиеме 3% од 2121,80 што изнесува 63,65 денари што значи вкупната сума ќе изнесува 2185,45 денари, а остварената камата 185,45 денари, односно 185 денари заокружени на цел број.

ПРИМЕР 2

Кристина вложила 10 000 денари со сложена каматна стапка од 10%. Колку пари ќе има Кристина по три години?

Според условите во задачата имаме дека $K = 10\,000$ денари, $p = 10\%$ и $t = 3$ години. На крајот од првата година ќе имаме камата $i = \frac{Kpt}{100} = \frac{10\,000 \cdot 10 \cdot 1}{100} = 1000$ денари.

Вредноста која ќе се вкаматува во втората година изнесува $10\,000 + 1000 = 11\,000$.

На крајот од втората година ќе имаме камата $\frac{11\,000 \cdot 10 \cdot 1}{100} = 1100$ денари.

Вредноста која ќе се вкаматува во третата година изнесува $11\,000 + 1100 = 12\,100$ денари.

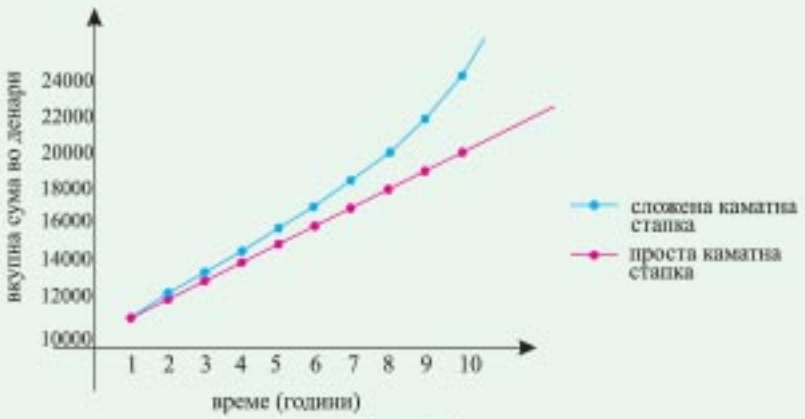
На крајот од третата година ќе имаме камата $\frac{12\,100 \cdot 10 \cdot 1}{100} = 1210$ денари.

Вкупната сума на крајот од третата година изнесува $12\,100 + 1210 = 13\,310$ денари.

Значи, за 3 години Кристина ќе може да повлече вкупно 13 310 денари.

На цртеж 1 е дадена споредба на зголемувањата на вложена сума од 10 000 денари со 10% проста и сложена каматна стапка.

Кога главнината, каматната стапка и времето се исти, вредноста на главнината пресметана со сложена каматна стапка ќе биде поголема од вредноста на главнината пресметана со проста каматна стапка.



Цртеж 1

Има исклучок кога каматниот износ се пресметува само за една година, во тој случај добиените вредности со сложена каматна стапка и проста каматна стапка ќе бидат еднакви.

АКТИВНОСТ

Потребни се многу пресметки за да ја одредиме вредноста на главнината добиена со сложена каматна стапка. Но постои и побрз начин. Разгледај ги и објасни ги пресметките во третата колона на следната табела:

Години	Вредност на главнината со 10% сложена каматна стапка пресметана после секоја година	Вредност на главнината со 10% сложена каматна стапка пресметана со множител после секоја година
1	11 000	$10\,000 \cdot (100\% + 10\%) = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}1) = 10\,000 \cdot (1{,}1)^1 = 11\,000$
2	12 100	$10\,000 \cdot (1{,}1)^2 = 12\,100$
3	13 310	$10\,000 \cdot (1{,}1)^3 = 13\,310$
4	14 641	$10\,000 \cdot (1{,}1)^4 = 14\,641$

Вредноста на главнината со сложена каматна стапка ја пресметуваме по формулата:

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

K_n е добиената вредност на главнината, K е главнината, p е каматната стапка и n е бројот на години.

ПРИМЕР 3

Вложени се 15 000 денари со 5% сложена каматна стапка. Колкава сума ќе се добие по 6 години?

Според условите во задачата имаме дека $K = 15\,000$ денари, $p = 5\%$, $n = 6$ години.

Од формулата за пресметување на вредноста на главнина добиваме

$K_6 = K\left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 = 15\,000 \cdot 1{,}05^6$ Пресметуваме со калкулатор.

$= 15\,000 \cdot 1{,}3401 = 20\,101{,}5$ денари Заокружуваме на 4 децимални места.

По 6 години ќе се добие сума од 20 102 денари, заокружено на цел број.

ЗАДАЧА 2

Вложени се пари со сложена каматна стапка од 4%. По 7 години се зголемила на 30 000 денари. Колку изнесува почетната вложена сума?

Пресметување сложена каматна стапка со различен период на вкаматување

Често пати, вкаматувањето се врши и за периоди помали од една година. Вкаматувањето може да биде месечно, на три месеци (квартално), на шест месеци (полугодишно или семестрално) итн.

За пресметување вредност со различен период на вкаматување, ја користиме формулата:

$$K_{m,n} = K\left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{m \cdot n}$$

$K_{m,n}$ е добиената вредност на главнината за период од n години, K е главнината, p е каматната стапка, m е бројот на вкаматувања годишно, и n е бројот на години.

ПРИМЕР 4

Колкава сума ќе се добие ако се вложат 100 000 денари на 9 години со сложена каматна стапка од 3%, ако вкаматувањето е семестрално?

Имаме дека $K = 100\,000$ денари, $p = 3\%$, $n = 9$ години и $m = 2$.
Од формулата за пресметување на вредноста на главнина добиваме

$$K_{2,0} = 100\,000\left(1 + \frac{3}{100 \cdot 2}\right)^{2 \cdot 9} = 100\,000 \cdot 1{,}015^{18} = 130\,734{,}6 \text{ денари.}$$

По 9 години ќе се добие сума од 130 734 денари, заокружено на цел број.

ЗАДАЧА 3

Колкава сума ќе се добие ако се вложат 130 000 денари на 2 години со сложена каматна стапка од 9%, ако вкаматувањето е квартално?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Во една банка висината на простата каматна стапка е 12%. Колкав ќе биде износот на каматата што треба да се исплати за штеден влог од 5000 денари по истекот на 3 години?
2. Шенол вложил 150 000 денари со 3 % проста каматна стапка. По неколку години неговата почетна сума се зголемила на 177 000 денари. На колку години ги вложил парите во банката?
3. Хана побарала кредит од 2000 евра за да ја опреми новата кујна. Банката одредила проста каматна стапка од 3%. Колку вкупно пари треба да врати на банката по 3 години?
4. Пресметај го вкупниот долг за станбен кредит од 40 000 евра по 10 години со сложена каматна стапка од 4%.
5. Подигнат е заем од 80 000 денари на две години со каматна стапка од 12%. Пресметај колку вкупно треба да се врати ако пресметувањето е со:
   а) проста каматна стапка б) сложена каматна стапка?
6. Дино треба да земе кредит од 360 000 денари на 3 години. Може да земе кредит со сложена каматна стапка од 3,5% или со проста каматна стапка од 3,7%? Со кој избор ќе плати помал каматен износ?
7. Која сума ќе се добие ако се вложат:
   а) 73 000 денари за 3 години со 7% сложена каматна стапка и полугодишно вкаматување?
   б) 10 300 денари за 5 години со 4% сложена каматна стапка и квартално вкаматување?
   в) 15 000 денари за 10 години со 5% сложена каматна стапка и месечно вкаматување?
8. Колку треба да се плати по основ на долг од 35 000 денари на една кредитна картичка по 2 години, ако сложената каматната стапка е:
   а) 13,5% и се пресметува на годишно ниво б) 13,5% и се пресметува на полугодишно ниво?
9. Урош ја инвестирал својата заштеда на една сметка со 6% сложена каматна стапка што се пресметува на половина година. Ако ставил 63 000 денари на оваа сметка, колку денари ќе има по две години?

ИСТРАЖУВАЊЕ

Реши го проблемот: „Кредит од 10 000 евра".

а) Истражи на интернет, собери податоци за видот на кредитите и каматните стапки што ги нудат банките во нашата земја.

б) Определи од која банка е најисплатливо да се подигне кредит од 10 000 евра.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Дали е празно множеството:

а) $B = \{x \mid x$ е прост парен број$\}$

б) $C = \{x \mid x$ е држава која се наоѓа јужно од Јужниот Пол$\}$

в) $D = \{x \mid x$ е четириаголник со два неконвексни агли$\}$

2. Дадени се подмножества од бои на стандарден шпил карти:

$A =$ {каро, пик, треф, херц}, $B =$ {каро, пик}, $C =$ {треф, херц} и $D =$ {треф}.

Изрази ја симболички врската помеѓу следните множества.

а) Множество A и множество C

б) Множество D и множеството C.

в) Множеството B и множеството C.

3. Нека $R = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\}$ е множество роботи и нека $T =$ {навигација, подигање, скенирање, сортирање, склопување, тестирање} е множеството задачи кои може да ги извршуваат роботите.

а) Распореди го секој робот на точно една задача. б) Дали $R \sim T$?

4. Дадени се множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ и $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$.

Најди множество X такво што $A \cap X = \{3, 5\}$ и $B \cup X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

5. Со помош на Венов дијаграм, најди ги множествата A и B, ако $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$ и $A \setminus B = \{1, 3\}$.

6. Дадени се универзалното множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и две негови подмножества: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ и $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

а) Провери дали се точни равенствата $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ и $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

б) Нацртај Венов дијаграм за множествата: $(A \cup B)^c$, $A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c$ и $A^c \cup B^c$

7. Дадени се множествата: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ и $C = \{3, 4, 5\}$. Најди го кардиналниот број:

а) $k(A)$ б) $k(B)$ в) $k(C)$ г) $k(A \cup B)$ д) $k(A \cap C)$

ѓ) $k(A \setminus C)$ е) $k(B \cup C)$ ж) $k(B \setminus C)$ з) $k(A \cup B \cup C)$ ѕ) $k(A \cap B \cap C)$

8. Во едно одделение има 36 ученици. Од нив 30 имаат мобилен телефон (М), 28 имаат калкулатор (К), а 2 ученици немаат ниту мобилен телефон ниту калкулатор. Колку ученици имаат мобилен телефон и калкулатор?

9. Едно истражување покажа дека 21 испитаник го купуваат производот A, 26 го купуваат производот B и 29 го купуваат производот C. Ако 14 испитаници ги купуваат производите A и B, 12 ги купуваат производите A и C, 14 ги купуваат производите B и C, а 8 испитаници ги купуваат сите три производи, колку испитаници го купуваат само производот C?

10. На училишната олимпијада доделени се 38 медали во фудбал (F), 15 медали во кошарка (K) и 20 медали во ракомет (R). Медалите ги освоиле 58 ученика и 3 ученика освоиле медали во трите спорта. Колку ученици освоиле медали во точно два од трите спорта?

11. Еден ланец на месари анкетирал 1000 клиенти. Од нив 720 изјавиле дека купуваат телешко месо, а 450 дека купуваат свинско месо. Колку најмалку купувачи купуваат телешко месо и свинско месо?

12. Запиши ги сите подредени парови броеви (a, b), такви што a е прост број од втората десетка, и $b = a + 3$.

13. Една компанија тестирала 3 уреди. Секој уред е тестиран со 2 оперативни системи.

    а) Запиши го множеството $D \times O$, ако $D = \{\text{телефон, таблет, лаптоп}\}$ и $O = \{\text{Андроид, Линукс}\}$.

    б) Колку тестирања извршила компанијата?

14. Анита има 72 литри сок од портокал и 90 литри сок од лимон. Таа сака да го претури во шишиња со еднаква зафатнина без да ѝ преостане сок. Која е најголемата можна зафатнина на шишињата?

15. Во еден тунел истовремено трепнаа три светлосни сигнали. Првиот трепкачки сигнал трепка на секои 12 секунди, вториот трепка на секои 18 секунди, а третиот на 30 секунди. По колку секунди повторно ќе трепнат заедно?

16. Исак, Петар и Гораст имаат чекори долги 60 cm, 65 cm и 70 cm. Тие тргнуваат истовремено, од исто место и во иста насока. На кое растојание е првата точка до која секој од нив ќе направи цел број чекори?

17. Спореди ги броевите: а) $|-7|$ и $|-10|$ б) $|-25|$ и $|4|$ в) $|0|$ и $|-8|$ г) $|12|$ и $|-100|$

18. Еден истражувач запишал дека подводна пештера се наоѓа на −30 метри надморска височина, врв на рид се наоѓа на 120 метри надморска височина, површина на езеро се наоѓа на 0 метри надморска височина и подземна лабораторија на −12 метри надморска височина.

    Подреди ги надморските височини од најниската до највисоката.

19. Ариф на сметката имал 3 600 денари, а треба да плати сметка за струја 2 860, сметка за вода 670 и сметка за телефон 1 340 денари.

    а) Колку денари ќе изнесува состојбата на сметката на Ариф после плаќањето на сметките?

    б) Дали ќе биде доволно да уплати 1 500 денари на сметката за да не биде во минус?

20. Пресметај:

    а) $\dfrac{3\frac{1}{5} \cdot 7\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5} - 2\frac{7}{30}}$ б) $\dfrac{\frac{2}{3}}{12} + \dfrac{\frac{5}{3}}{6} - \dfrac{2 + \frac{1}{3}}{3 - \frac{2}{5}}$ в) $\dfrac{\left(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}\right) \cdot 5\frac{5}{6}}{(21 - 1{,}25) : 2{,}5}$

21. Пресметај:

а) $3{,}72 + 0{,}02 - 2{,}35$ б) $0{,}5 + 1{,}(5) - 2{,}3(7)$ в) $6{,}25 : 0{,}5 \cdot 0{,}01$

22. За изградба на еден мал мост потребни се 3,25 метри челична шипка за основата, 2,6 метри за странични делови и 1,85 метри за горниот дел.

а) Колку метри челична шипка се потребни?

б) Колку парчиња челична шипка треба да се набават ако во продажба има само парчиња челична шипка долги 2,5 метри?

23. Орбитата на една планета има радиус $r = 149{,}6$ милиони километри. Пресметај ја приближно должината на орбитата на планетата, ако $\pi \approx 3{,}14$.

24. Бактериите преживуваат само ако температурата е меѓу 5 °C и 45 °C.

а) Запиши го интервалот на дозволената температура.

б) Дали бактериите ќе преживеат на температурата од 5 °C?

25. На еден готвач потребен му е 1 час за да ги подготви состојките, 2 часа и 15 минути за да го приготви јадењето и 45 минути за да исчисти. Одреди го размерот на времето потребно за подготвување на состојките спрема времето за готвење спрема времето за чистење. Запиши го решението во упростен облик.

26. Во една кутија има 1160 бели, црвени и сини топчиња. По колку топчиња има од секоја боја, ако бројот на бели и црвени топчиња се однесуваат како 5 : 6, а бројот на црвени и сини топчиња се однесуваат како 4 : 6?

27. Кои од следниве величини се правопропорционални, а кои се обратнопропорционални:

а) производот на два броја, ако еден множител е константен,

б) вредноста на дропката и нејзиниот броител, ако нејзиниот именител е константен,

в) вредноста на дропката и нејзиниот именител, ако нејзиниот броител е константен.

28. Фирма инвестира во соларни панели кои носат приход од 120 000 денари месечно. Првата година трошоците за одржување се 25% од приходот. Втората година тие се намалуваат за 40%.

а) Колку денари се трошеле месечно за одржување првата година?

б) Колку изнесуваат трошоците втората година по намалувањето?

в) Колкав е процентуалниот пораст на профитот од одржување помеѓу двете години?

29. Трговска компанија набавила 40 електрични тротинети по цена од 32 000 денари за еден тротинет. Поради технички проблеми со батеријата, морала да ги продаде со загуба од 35%.

а) По која цена е продаден секој тротинет? б) Колкава е загубата по парче?

в) Колкава е вкупната загуба за сите тротинети?

30. Андреј увезува книга која чини 80 евра. За транспорт треба да плати 10 евра. Колку треба да плати при подигање на книгата ако е ослободен од плаќање царина, а ДДВ стапката е 5%?

31. Од еден извор истекуваат 100 литри вода за 16 минути. Колку литри вода ќе истечат за $3\frac{2}{3}$ часа?

32. Еден производ чини 350 долари во САД и 19 000 денари во Македонија. Во која држава производот е поевтин?

33. Три багери со моќност 160 киловати можат за 10 дена, работејќи по 6 часа дневно, да ископаат канал долг 360 метри, широк 4 метри и длабок 2,5 метри. Колку долг канал може да ископаат 5 багери од по 120 киловати, ако работат 8 дена по 7 часа дневно, и ако каналот е широк 3,5 метри, а длабок 2 метра?

34. Најди ги аглите во четириаголник, ако тие се однесуваат како 2 : 5 : 4 : 7.

35. Тројца луѓе треба да поделат наследство од 70 000 евра, обратнопропорционално на годините што ги има секој од нив. Ако тие имаат соодветно, 20, 30 и 40 години, по колку од наследството ќе добие секој од нив?

36. Сакаме да добиеме 3 литри 1,5% раствор на сол, а на располагање имаме 1,8% раствор на сол и 1,1% раствор на сол. По колку литри треба да се земе од секој вид раствор?

37. На почетокот на зимата возачот во својот автомобил ставил 2,5 литри антифриз помешан со 2,5 литри вода. По еден месец 1 литар од мешавината истекла, а возачот тоа го надоместил со дотурање на 1 литар вода. Следниот месец, повторно 1 литар од мешавината истекла. Но, возачот овој пат дотурил 1 литар антифриз.

    а) Дали сега во смешата во резервоарот има повеќе антифриз или вода?

    б) Каков ќе беше одговорот ако возачот првиот пат дотурил 1 литар антифриз, а вториот пат дотурил 1 литар вода?

38. Сузана заработила од својата инвестиција сума од 7000 денари за 3 години. Колку пари инвестирала ако простата каматна стапка била 14,25%?

39. Ахмет е сопственик на мала продавница. Зел кредит од 185 000 денари за нова опрема. Целиот кредит го вратил по две години. Ако банката наплатила сложена каматна стапка од 15%, колку вкупно вратил Ахмет по две години?

Тема 2:

АЛГЕБАРСКИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Во изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш:

1. да решаваш проблеми во секојдневен контекст со степени;
2. да ги применуваш правилата за средување полиноми во СТЕМ проблеми;
3. да применуваш операции со алгебарски дропки за упростување на дробно-рационални изрази.

02

2.1. Степен и вредност на степен со показател природен број

Степен со показател природен број

Збирот на еднакви собироци може да го запишеме вака:

$10 + 10 = 2 \cdot 10$

$10 + 10 + 10 = 3 \cdot 10$

$10 + 10 + 10 + 10 = 4 \cdot 10$

.....

$\underbrace{10 + 10 + 10 + \ldots + 10}_{n \text{ пати}} = n \cdot 10$

Собирањето на еднакви собироци доведува до операцијата **множење**.

Производот на еднакви множители се запишува вака:

$2 \cdot 2 = 2^2$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$

.....

Множењето на еднакви множители доведува до операцијата **степенување**.

За производот од 5 множители еднакви на бројот 2 запишуваме

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ читаме „2 на степен 5“ или „2 на петта“

Степеновиот показател 5 покажува колку пати основата 2 е помножена сама со себе.

$4 \cdot 4 = 4^2$ читаме „4 на степен 2“ или „4 на квадрат“

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ читаме „6 на степен 3“ или „6 на куб“

Производот од n еднакви множители, секој од кои е реален број a, се нарекува **степен** со **основа** a и **степенов показател** (експонент) n, и се означува со a^n.

$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ пати}} = a^n$ читаме „a на степен n“ или „a на n-та “

Бидејќи секој производ има барем два множители, според погорната дефиниција, степеновиот показател n не е помал од 2. Ја дополнуваме дефиницијата и по договор земаме $a^1 = a$. Во таа смисла, на пример, $8^1 = 8$.

ПРИМЕР 1

Запиши го во вид на степен производот:

а) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$, б) $(-0{,}7) \cdot (-0{,}7) \cdot (-0{,}7)$, в) $x \cdot x \cdot x$, г) $(-a) \cdot (-a)$.

а) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$ производ од 4 множители еднакви на бројот 7

б) $(-0{,}7) \cdot (-0{,}7) = (-0{,}7)^2$ производ од 2 множители еднакви на бројот $(-0{,}7)$

в) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$ производ од 5 множители еднакви на x

г) $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) = (-a)^3$ производ од 3 множители еднакви на $(-a)$

ЗАДАЧА 1

Запиши ги степеновиот показател и основата на степенот:

а) $(-3)^6$ б) $\frac{2}{3}$ в) $(0{,}5)^3$ г) $\left(-\frac{6}{11}\right)^7$ д) $(-x)^2$ ѓ) $(a+b)^5$

ЗАДАЧА 2

На четири ракометни натпревари вкупниот број голови за својата екипа ги постигнале 4 ракометари кои дале по 4 гола на секој натпревар.

а) Запиши го во вид на степен бројот на голови што ги постигнала екипата на секој од натпреварите.

б) Запиши го во вид на степен вкупниот број на голови што ги постигнала екипата на четирите натпревари.

Вредност на степен

Вредноста на степенот на кој било број се пресметува така што тој се запишува во вид на производ, а потоа се врши множењето.
Пресметувањето на степенот може да го вршиме и со употреба на калкулатор.

За пресметување на степен со степенов показател 2 (квадрат) и степенов показател 3 (куб) ги користиме копчињата x^2 и x^3.

За пресметување на степен со степенов показател различен од 2 (квадрат) или 3 (куб) ги користиме копчињата $x^{\blacksquare}$ или y^x

ПРИМЕР 2

Пресметај ја вредноста на степенот: а) 2^4 б) $(-3)^5$ в) $(-7)^2$ г) 1^7 д) 0^6

а) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ или на калкулатор [2] [$x^{\blacksquare}$] [4] [=]
Забележи дека степен од позитивен број е позитивен број.

б) $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$ или на калкулатор [(–)] [3] [$x^{\blacksquare}$] [5] [=]
Сигурно воочи дека степен од негативен број со непарен показател е негативен број.

в) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$ или на калкулатор [(–)] [7] [x^2] [=]
Пресметавме вредност на степен од негативен број со парен показател и добивме позитивен број.

г) $1^7 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ д) $0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

АКТИВНОСТ

Запиши го степенот и пресметај ја неговата вредност:

а) основа 12 и показател 4, б) основа -7 и показател 3, в) основа $-1{,}6$ и показател 2.

Дали можеш да изведеш заклучок за врската меѓу знакот на основата и парноста на степенот со знакот на вредноста на степенот?



- Степен на позитивен број е позитивен број, односно ако $a > 0$ тогаш, $a^n > 0$.
- Степен на негативен број со парен показател е позитивен број, односно ако $a < 0$ тогаш, $a^{2k} > 0$, за $k \in \mathbb{N}$.
- Степен на негативен број со непарен показател е негативен број, односно ако $a < 0$ тогаш, $a^{2k+1} < 0$, за $k \in \mathbb{N}$.
- Специјално, ако $a = 1$, тогаш $a^n = 1$ и ако $a = 0$, тогаш $a^n = 0$.

ЗАДАЧА 3

Без пресметување, определи го знакот на степенот:

а) 25^5 б) $(-16)^7$ в) $(-16)^3$ г) 0^{81} д) 1.

Провери го твојот заклучок со пресметување на вредноста на степенот со калкулатор.

ПРИМЕР 3

Пресметај ја вредноста на изразот $(25^3 + 15^2) : (25 - 15)$, а потоа направи проверка со калкулатор.

Потребно е да ги проследиме правилата:

При пресметување на вредност на броен израз со загради, **предност имаат операциите во заградите**.

При пресметување на вредност на броен израз со операции степенување, множење, делење, собирање, одземање, прво го извршуваме **степенувањето**, потоа **множењето** и **делењето** и на крај **собирањето** и **одземањето**.

$$(25^3 + 15^2) : (25 - 15) = (15625 + 225) : 10$$
$$= 15850 : 10 = 1585$$

За да пресметаме со калкулатор во еден чекор треба да користиме загради:

(2 5 x^3 + 1 5 x^2) ÷ (2 5 − 1 5) =

ЗАДАЧА 4

Планетата Марс е четврта планета од Сончевиот Систем. Дијаметарот на планетата е околу 9^4 километри. Запиши го степенот во вид на производ и пресметај го. Колку километри изнесува дијаметарот на Марс?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Запиши го во вид на степен производот:

   а) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ б) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ в) $t \cdot t \cdot t \cdot t \cdot t$

   г) $a \cdot a \cdot a$ д) $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a)$ ѓ) $d \cdot e \cdot e \cdot d \cdot d \cdot e$

2. Пресметај со помош на калкулатор:

   а) 7^2 б) 2^7 в) 4^3 г) $(-7)^8$ д) 0^8 ѓ) $(-2)^5$ е) $0{,}2^2$

3. Определи го знакот на степенот: а) 25^{35} б) $(-16)^{54}$ в) $(-16)^{23}$ г) 0^{81} д) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{21}$

4. Заокружи што е точно:
а) $2^3 = 3^2$ б) $(-2)^3 = (-3)^2$ в) $(-2)^{100} > 0$ г) $(-3)^{23} < 0$ д) $0^{10} < 10$.

5. Спореди го со нула бројот a, ако:
а) $a^{75} < 0$ б) $a^{13} > 0$ в) $(-a)^{53} > 0$ г) $a^{23} = 0$ д) $2a^3 < 0$.

6. Пресметај ја вредноста на изразот:
а) $3 \cdot 5^2 + 4^3 - 5 \cdot 7^3$ б) $(-2)(-3)(-4)^2 - (-1)^5(-2)^2$
в) $100 \cdot (-2{,}1)^3 + 3{,}4 \cdot (-2{,}2)^2 - 0{,}3 \cdot (-0{,}3)^2$ г) $(2^3 + 4^2) : (3^5 - 5^3)$
Направи проверка со калкулатор.

7. Пресметај ја вредноста на изразот
а) $6a^7 + 3a^4 - 8a^{45} + 4$ за $a = -1$ б) $2ax^3 - a^2x^2 + 3ax + 10$ за $a = -1$ и $x = 2$

8. Олга споделила информација за претстојниот концерт со тројца пријатели. Секој од нив ја споделил информацијата со тројца различни пријатели, а тие ја споделиле уште со по тројца различни пријатели. Колку вкупно луѓе дознале за концертот?

9. Ако популација на бактерии се удвојува на секој час, колку бактерии ќе се намножат од 1 бактерија по 6 часа?

10. Времето потребно за Венера да се заврти околу својата оска е 3^5 пати подолго од времето потребно за завртување на Земјата околу својата оска. Пресметај ја вредноста на степенот за да најдеш колку пати е подолго времето на завртување околу својата оска на Венера отколку времето на завртување на Земјата околу својата оска.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Ако степенуваме на квадрат број чија цифра на единици е 2, бројот што ќе го добиеме ќе завршува на 4.

Ако еден број има цифра на единици 1, на која цифра ќе завршува неговиот трети степен? Запиши слични примери за броевите со цифри на единици од 3 до 9.

Постојат некои цифри што никогаш не можат да се најдат на местото единици на броеви кои се квадрати на некој број. Откриј кои се тие цифри.

2.2. Квадратен и кубен корен

Квадратен корен

АКТИВНОСТ

Плоштината на еден квадрат е 49 cm². Колку центиметри изнесува неговата страна?
Како ќе ја пресметаш страната?

Разгледај ја табелата:

n	3	7		9	
n^2			36		64

За да ја пополниш табелата од тебе се бара:

- за броевите 3, 7 и 9 да ги најдеш нивните квадрати, а тоа се 9, 49 и 81, соодветно;
- да најдеш броеви чии квадрати се 36 и 64.

Второто барање е обратно од првото, односно за бројот 36 треба да најдеш број чиј квадрат е 36. Тој број се означува со $\sqrt{36}$ и се нарекува квадратен корен од бројот 36.

$\sqrt{36} = 6$ бидејќи $6^2 = 36$ $\sqrt{64} = 8$ бидејќи $8^2 = 64$



Квадратен корен (корен со показател 2) од ненегативен реален број a е ненегативен реален број b, таков што $b^2 = a$ и се означува со $\sqrt{a}$.

$\sqrt{a} = b$ читаме „квадратен корен од a е b“

Во изразот $\sqrt{a}$ бројот a се вика **поткоренова величина.**

Инверзната операција на операцијата степенување, со која пресметуваме квадратен корен од даден број се вика **коренување со коренов показател 2** или само **коренување.**

На калкулаторите постои посебно копче за пресметување на квадратен корен, најчесто означено со $\sqrt{\ }$ или $\sqrt{\square}$. Така, за да пресметаме квадратен корен од 64 внесуваме:

6 4 $\sqrt{\ }$ = или $\sqrt{\ }$ 6 4 =

ЗАДАЧА 1

Пресметај ја вредноста на изразот и направи проверка со калкулатор:

а) $\sqrt{16} + \sqrt{25}$ б) $3 + 2\sqrt{36}$ в) $\sqrt{15^2 - 12^2}$ г) $5^2 + 4\sqrt{81}$

АКТИВНОСТ

Пресметај ја вредноста на квадратниот корен и направи проверка со калкулатор:

а) $\sqrt{100}$ б) $\sqrt{10\,000}$ в) $\sqrt{0{,}01}$ г) $\sqrt{0{,}0001}$

Дадените броеви имаат парен број на нули.

Каква е врската помеѓу бројот на нули во записот на бројот со бројот на нули во записот на неговиот квадратен корен? Можеш ли да изведеш општ заклучок?

Кубен корен

АКТИВНОСТ

Волуменот на коцка е 27 cm³. Колку центиметри изнесува нејзиниот раб?
Како ќе ја пресметаш должината на работ?

Разгледај ја табелата:
За да ја пополниш табелата треба:

n	2	−5		
n^3			27	−64

- да ги најдеш кубовите на броевите 2 и −5, а тоа се броевите 8 и −125, соодветно;
- да ги најдеш броевите чии кубови се 27 и −64.

Второто барање е обратно од првото, односно за бројот 27 треба да најдеш број чиј куб е 27. Тој број се означува со $\sqrt[3]{27}$ и се нарекува кубен корен од бројот 27.

$\sqrt[3]{27} = 3$ бидејќи $3^3 = 27$ $\quad\quad$ $\sqrt[3]{-64} = -4$ бидејќи $(-4)^3 = -64$

Кубен корен (корен со показател 3) од реален број a е реален број b, таков што $b^3 = a$ и се означува со $\sqrt[3]{a}$.

$\sqrt[3]{a} = b$ читаме „кубен корен од a е b“

Операцијата со која пресметуваме кубен корен од даден број се вика **коренување со коренов показател 3** или само **коренување**.

На калкулаторите постои посебно копче за пресметување на кубен корен, најчесто означено со $\sqrt[3]{}$ или $\sqrt[3]{\square}$. Така, за да пресметаме кубен корен од 125 внесуваме:

1 2 5 $\sqrt[3]{}$ = или $\sqrt[3]{}$ 1 2 5 =

ЗАДАЧА 2

Пресметај ја вредноста на изразот и направи проверка со калкулатор:

а) $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-8}$ $\quad$ б) $1{,}5 - 6\sqrt[3]{27}$

в) $\sqrt[3]{3^2 - 1^2}$ $\quad$ г) $(4 + 7\sqrt[3]{125}) : (5^2 - 4\sqrt[3]{27})$

АКТИВНОСТ

Пресметај ја вредноста на кубниот корен и направи проверка со калкулатор:

а) $\sqrt[3]{1000}$ $\quad$ б) $\sqrt[3]{1000000}$ $\quad$ в) $\sqrt[3]{0{,}001}$ $\quad$ г) $\sqrt[3]{0{,}000001}$

Каква е врската помеѓу бројот на нули во записот на бројот со бројот на нули во записот на неговиот кубен корен? Можеш ли да изведеш општ заклучок?

n-ти корен

АКТИВНОСТ

Знаеме дека, на пример, $\sqrt{4} = 2$ бидејќи $2^2 = 4$ $\quad \sqrt[3]{-27} = -3$ бидејќи $(-3)^3 = -27$.
Ако размислуваме на истиот начин, колку ќе биде, на пример, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{-243}$ и $\sqrt[6]{64}$?



- Нека a е ненегативен реален број и $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.
  Ненегативниот број b таков што $b^n = a$ се нарекува ***n*-ти корен** од a.
- Нека a е реален број и $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.
  Реалниот број b таков што $b^n = a$ се нарекува ***n*-ти корен** од a. Означуваме
  $b = \sqrt[n]{a}$ читаме „b е n-ти корен од a“ или
  $b = a^{\frac{1}{n}}$ читаме „b е a на степен $\frac{1}{n}$“

Во таа смисла, на пример, $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$.
На калкулаторите постои посебно копче за пресметување на корен од кој било ред, најчесто означено со $\sqrt[x]{}$ или $\sqrt[x]{}$ или $\sqrt[\square]{x}$

ЗАДАЧА 3

Пресметај:
а) $\sqrt{4}$ б) $\sqrt[3]{-27}$ в) $\sqrt[4]{16}$ г) $\sqrt[5]{-243}$ д) $\sqrt[6]{64}$ ѓ) $\sqrt[8]{256}$ е) $\sqrt[7]{2187}$

ЗАДАЧА 4

Пресметај ја вредноста на изразот и направи проверка со калкулатор:
а) $\sqrt[5]{243} + \sqrt[3]{-27}$ б) $3 - 2{,}5\sqrt[6]{64}$ в) $\sqrt[3]{4^3 - 32}$ г) $(4^2 - 3\sqrt[4]{625}) : (7^2 + 4\sqrt[4]{81})$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај:
а) квадратен корен од 100 б) трети корен од 8 в) $\sqrt{49}$ г) $\sqrt[3]{81}$

2. Препиши и дополни ги дадените табели.
а) Квадратите на броевите од 1 до 15:

Број	1	2		4		6			9	10	11			14	15
Квадрат			9		25		49	64				144	169		

б) Кубовите на броевите од 1 до 5 и кубот на бројот 10:

Број	1	2		4		10
Куб			27		125	

3. Најди природен број n таков што:
   а) n^2 е помеѓу 50 и 80 б) n^3 е помеѓу 50 и 100.

4. Пресметај и направи проверка со калкулатор:
   а) $7^2 + \sqrt{49}$ б) $\frac{6^2}{\sqrt{81}}$ в) $\sqrt{10^2 - 8^2}$ г) $\sqrt[3]{64} + \sqrt{64}$
   д) $\sqrt[3]{512}\frac{3^2}{4^2}$ ѓ) $\sqrt[3]{1000} - \frac{1}{\sqrt{100}}$ е) $(\sqrt{20})^2 + \sqrt[3]{-8}$ ж) $15\sqrt[3]{27} + 2\sqrt{16} - 9$

5. Пресметај ја вредноста на изразот и направи проверка со калкулатор:
   а) $2x - \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 12$ за $x = 64$ б) $(a^2 + 2\sqrt[3]{a-7} - 4)^2 + a^2 - \sqrt{a}$ за $a = 81$

6. Упрости: а) $\frac{\sqrt[3]{3}+5}{2} \cdot \frac{3}{2\sqrt[3]{3}+10} + \frac{1}{4}$ б) $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt{5}}{14} : \frac{2\sqrt[3]{3}-2\sqrt{5}}{7} - \frac{1}{4}$

7. Растојанието потребно за безбедно запирање на еден автомобил правопропорционално се зголемува со квадратот на брзината на автомобилот. Ако на автомобилот му се потребни 40 m за запирање при брзина од 20 km/h, при колкава брзина на автомобилот би му биле потребни 90 m за запирање?

8. Компанија која произведува картонски кутии во форма на коцка треба да произведе кутија со волумен од 64 cm^3. Пресметај ја должината на работ на кутијата.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Сара ја проценува вредноста на $\sqrt{45}$. Таа вели дека $\sqrt{45}$ мора да биде број помеѓу 6 и 7. Нејзиното објаснување е дека 45 е помеѓу 36 ($36 = 6^2$) и 49 ($49 = 7^2$).

Истражи и откриј помеѓу кои два броја се наоѓа коренот:

а) $\sqrt{32}$ б) $\sqrt{102}$ в) $\sqrt{150}$ г) $\sqrt[3]{12}$ д) $\sqrt[3]{100}$ ѓ) $\sqrt{2000}$

Провери ги резултатите од твоето истражување со калкулатор.

2.3. Операции со степени со показател природен број

Множење и делење на степени со еднакви основи

АКТИВНОСТ

Разгледај и објасни како множиме степени со еднакви основи?

$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$ $3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$

Правилото важи за производот на кои било два степена со еднакви основи.

Степени со еднакви основи се множат, така што основата се степенува со збирот од степеновите показатели на степените, односно

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}. \quad (1)$$

Аналогно правило важи и за производот на произволен број множители.

ПРИМЕР 1

Запиши го во вид на степен производот: а) $7^2 \cdot 7^6$ б) $(-3)^7 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5$

а) $7^2 \cdot 7^6 = 7^{2+6} = 7^8$

Во калкулатор внесуваме

7 x^2 × 7 x^y 6 =

и добиваме 5 764 801, што е еднакво на 7^8.

б) $(-3)^7 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5 = (-3)^{7+2+5} = (-3)^{14}$

Во калкулатор внесуваме

(−3) x^y 7 × (−3) x^y 2 × (−3) x^y 5 =

и добиваме 4 782 969, што е еднакво на $(-3)^{14}$.

ПРИМЕР 2

Упрости го изразот: а) $5p^7 \cdot 4p^4$ б) $0{,}2(y+1)^8 \cdot 0{,}5(y+1)^3$

а) $5p^7 \cdot 4p^4 = (5 \cdot 4)\, p^{7+4} = 20p^{11}$ б) $0{,}2(y+1)^8 \cdot 0{,}5(y+1)^3 = (0{,}2 \cdot 0{,}5)(y+1)^{8+3} = 0{,}1(y+1)^{11}$

ЗАДАЧА 1

Запиши го во вид на степен производот:

а) $100^4 \cdot 100^6$ б) $(-6)^4 \cdot (-6)^2 \cdot (-6)^3$ в) $x^3 \cdot x^8$ г) $(x-1)^8 \cdot (x-1)^{23} \cdot (x-1)^{23}$

ПРИМЕР 3

Еден работник, во фабрика за производство на чоколади пакува, по 3^2 чоколади во една кутија. Во текот на денот работникот спакувал 3^3 кутии со чоколади. Пресметај колку вкупно чоколади спакувал работникот во текот на денот. Изрази го решението во вид на степен, а потоа пресметај ја неговата вредност.

$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$

Фабриката спакувала 243 чоколади.

АКТИВНОСТ

Откриј го правилото за делење на степени со еднакви основи според пресметките:

$3^6 : 3^2 = 3^{6-2} = 3^4$ $\quad 3^6 : 3^2 = \frac{3^6}{3^2} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^4$



Степени со еднакви основи се делат така што заедничката основа се степенува со разликата на показателот на деленикот со показателот на делителот, односно

$a^n : a^m = a^{n-m}$, при услов $m > n$ и $a \neq 0$. (2)

ПРИМЕР 4

Запиши го во вид на степен количникот: а) $13^7 : 13^3$ б) $(-a)^{11} : (-a)^4$

а) $13^7 : 13^3 = 13^{7-3} = 13^4$ б) $(-a)^{11} : (-a)^4 = (-a)^{11-4} = (-a)^7$

ЗАДАЧА 2

Запиши го во вид на степен количникот:

а) $5^6 : 5^4$ б) $0{,}35^8 : 0{,}35^6$ в) $(-4)^{12} : (-4)^7$ г) $y^{72} : y^{46}$ д) $(a-b)^7 : (a-b)^3$

ЗАДАЧА 3

Една фабрика во текот на денот троши 5^6 киловати на час електрична енергија. За време на ноќта, фабриката троши 5^2 киловати на час електрична енергија. Колку пати повеќе електрична енергија троши фабриката во дневните часови во споредба со ноќните часови? (напомена: Бројот на часови во текот на денот е еднаков со бројот на часови во текот на ноќта)

Степенување на производ, количник и степен

АКТИВНОСТ

Проследи ја пресметката и заклучи како се степенува производ од два броја.

$(4 \cdot 5)^3 = 4^3 \cdot 5^3$ $(4 \cdot 5)^3 = (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4^3 \cdot 5^3$

Веројатно забележа дека третиот степен од производот е производот од третите степени на множителите.



Производ на два броја се степенува така што секој множител се степенува со степеновиот показател, па добиените степени се множат, односно

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (3)

ПРИМЕР 5

Степенувај го производот: а) $(2 \cdot 3)^4$ б) $[(-0{,}25) \cdot (2{,}7)]^4$ в) $(-2a)^5$

а) $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$ б) $[(-0{,}25) \cdot (2{,}7))]^4 = (-0{,}25)^4 \cdot (2{,}7)^4$ в) $(-2a)^5 = (-2)^5 \cdot a^5$

Правилото за степенување на производ на два броја може да се прошири за случај кога производот има повеќе од два множители.

ПРИМЕР 6

Упрости го изразот: а) $(4 \cdot 3 \cdot 2)^3$ б) $[(-3) \cdot 5 \cdot x]^5$

а) $(4 \cdot 3 \cdot 2)^3 = 4^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3$
$= 64 \cdot 27 \cdot 8$
$= 13\,824$

б) $((-3) \cdot 5 \cdot x)^4 = (-3)^4 \cdot 5^4 \cdot x^4$
$= 81 \cdot 625 \cdot x^4$
$= 50\,625 \cdot x^4$

ЗАДАЧА 4

Степенувај го производот: а) $\left[(-5) \cdot 0{,}75 \cdot \frac{2}{3}\right]^4$ б) $(x \cdot y \cdot z)^3$ в) $\left(\frac{x}{3} \cdot \frac{y}{2} \cdot z\right)^3$

АКТИВНОСТ

Една транспортна компанија има 2^4 камиони. Во секој камион натоварила по 5^4 кутии за транспорт. Прочитај го правилото за степенување на производ оддесно на лево за полесно за да пресметаш колку кутии натоварила компанијата?

Равенството (3) понекогаш е корисно да се чита и применува оддесно налево, односно

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

што значи дека степени со еднакви показатели се множат, така што производот од нивните основи се степенува со заедничкиот степенов показател.

ПРИМЕР 7

Помножи ги и пресметај ги степените: а) $6^3 \cdot 5^3$ б) $24^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$

а) $6^3 \cdot 5^3 = (6 \cdot 5)^3 = 30^3 = 27\,000$

б) $24^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(24 \cdot \frac{1}{6}\right)^3 = 4^3 = 64$

ЗАДАЧА 5

Пресметај: а) $55^2 \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^2$ б) $4^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7$ в) $(-3)^{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$ г) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3$.

АКТИВНОСТ

Откриј го правилото за степенување на количник:

$(4 : 5)^3 = 4^3 : 5^3$ $(4 : 5)^3 = (4 : 5) \cdot (4 : 5) \cdot (4 : 5) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{4^3}{5^3} = 4^3 : 5^3$

Сигурно забележа дека трети степен од количник е количникот од третите степени на деленикот со делителот. Во општ случај имаме дека:



Количник од два броја се степенува така што одделно се степенуваат дељеникот и делителот со степеновиот показател, а потоа степенуваниот дељеник се дели со степенуваниот делител, односно

$(a:b)^n = a^n : b^n$, при услов $b \neq 0$ (4)

ПРИМЕР 8

Степенувај го количникот: а) $(4:5)^3$ б) $(2:7)^{12}$ в) $(x:2)^3$

а) $(4:5)^3 = 4^3 : 5^3$ б) $(2:7)^{12} = 2^{12} : 7^{12}$ в) $(x:2)^3 = x^3 : 2^3$

ЗАДАЧА 6

Изврши го степенувањето на количникот: а) $(7:3)^{23}$ б) $(2:x)^5$ в) $[(x+1):x]^3$

Равенството (4) понекогаш е корисно да се чита и применува оддесно налево, односно

$a^n : b^n = (a:b)^n$, при услов $b \neq 0$

што би значело дека степени со еднакви показатели се делат, така што количникот од нивните основи се степенува со заедничкиот степенов показател.

ПРИМЕР 9

Упрости го изразот и запиши го решението во вид на степен: а) $27^5 : 9^5$ б) $1{,}5^3 : 0{,}5^3$

а) $27^5 : 9^5 = (27:9)^5 = 3^5$ б) $1{,}5^3 : 0{,}5^3 = (1{,}5:0{,}5)^3 = 3^3$

ЗАДАЧА 7

Антената А пренесува сигнал со јачина од 50 единици, додека антената В пренесува сигнал со јачина од 10 единици.

Ако и двете јачини на сигналот се степенуваат со показател 2, колкав ќе биде односот на јачината на сигналот на антената А со антената В по засилувањето?

АКТИВНОСТ

Степенот $(3^4)^2$ чија основа е степенот 3^4, може да го запишеме како степен со основа 3. Проследи ги пресметките и објасни како може степенот $(3^4)^2$ чија основа е степенот 3^4, да го запишеме како степен со основа 3.

$(3^4)^2 = 3^{4\cdot 2} = 3^8$ $(3^4)^2 = (3^4)\cdot(3^4) = (3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)\cdot(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3) = 3^8$

Сигурно забележа дека степеновиот показател е производ на двата степенови показатели. Во општ случај имаме дека:



Степен се степенува така што основата на степенот се степенува со производот на двата показатели, односно

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad (5)$$

ПРИМЕР 10

Степенувај го степенот: а) $(2^4)^3$ б) $[(-7)^7]^7$ в) $[(-0{,}25)^8]^{12}$ г) $(x^7)^5$

а) $(2^4)^3 = 2^{12}$ б) $[(-7)^7]^7 = (-7)^{49}$ в) $[(-0{,}25)^8]^{12} = (-0{,}25)^{96}$ г) $(x^7)^5 = x^{35}$

ЗАДАЧА 8

Една компанија спакувала 2^2 бонбони во мала кутија, 2^3 мали кутии во средна кутија, и на крај 2^2 средни кутии во голема кутија.

а) Запиши го бројот на бонбони што ги спакувала компанијата во вид на степен со основа 2^2, а потоа во вид на степен со основа 2.

б) Пресметај го бројот на бонбони што ги спакувала компанијата.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Упрости го изразот со користење на калкулатор:

а) $2^5 \cdot 2^4$ б) $(0{,}6)^4 : (0{,}6)^2$ в) $8^4 \cdot 0{,}25^4$ г) $(-12)^5 : 6^5$ д) $(-8^5)^4$

2. Упрости го изразот:

а) $15x^8 \cdot 3x^2$ б) $32y^4 : (8y^2)$ в) $(3ab^3)^7$ г) $3y^2 \cdot x^3 \cdot 5y^5 \cdot 4x^5$

д) $(a^3)^6 : (a^4)^3$ ѓ) $x^7 \cdot x^3 : x^6$ е) $(y^7 + 2y^2z) : y$ ж) $a^x(a^{x+1} + a^x) - a^{x+2}(a^{x+3} - a^x)$

3. Најди ги вредностите на n и m, ако:

а) $x^m \cdot x^n = x^9$ и $x^m : x^n = x$ б) $x^m : x^n = x$ и $x^m \cdot x^n = x^7$

4. СТЕМ клуб дизајнирал банка за напојување. Една батериска ќелија обезбедува 1 единица напојување. Во еден слој на банката за напојување се поврзани 2^3 батериски ќелии. Во банката за напојување се поврзани 2^4 батериски слоја. Колку вкупно напојување е достапно? Запиши го решението во вид на степен, а потоа пресметај ја неговата вредност.

5. Хемискиот раствор има концентрација 5^5 mmol/L. По разредувањето, концентрацијата се намалува на 5^2 mmol/L. Колку пати е намалена концентрацијата? Запиши го решението како степен со показател 5.

6. Една градежна фирма има 3^3 камиони. Во секој камион натоварила по 4^3 вреќи цемент. Колку вкупно вреќи цемент натоварила фирмата?

7. По рецептот потребни се 6 чаши млеко за да се направат 2 торти. Ако двете количества ги степенуваме со показател 3, колку чаши млеко ќе бидат потребни за да се направи 1 торта според новиот рецепт?

8. Во една библиотека на една полица се наредени 3^2 книги, на една сталажа се наредени 3^2 полици и во еден отворен плакар се наредени 3^2 сталажи.
Колку книги се наредени во библиотеката? Изрази го решението во вид на степен со основа 3^2, а потоа во вид на степен со основа 3 и пресметај ја неговата вредност.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Адор ја проценил вредноста на 257^8 со следнава постапка:

$200 < 257 < 300$

$2 \cdot 100 < 257 < 3 \cdot 100$

$2^8 \cdot 100^8 < 257^8 < 3^8 \cdot 100^8$

$10^2 \cdot 100^8 < 257^8 < 10^4 \cdot 100^8$

$10^{18} < 257^8 < 10^{20}$

Истражи и откриј друг начин според кој ќе определиш помеѓу кои два броја се наоѓа степенот:

а) 426^4 б) 344^6 в) 1567^3 г) 6783^5 д) 25075^7

2.4. Степен со степенов показател цел број и рационален број

Степен со степенов показател негативен цел број или нула

Досега разгледувавме степенови показатели кои беа природни броеви. Но, кога делиме степени со еднакви основи, според истото правило без назначеното ограничување за степеновите показатели, добиениот степенов показател може да биде и негативен број или нула.

АКТИВНОСТ

Колку би можело да биде 2^{-3}? Како би можело да се степенува со негативен цел број, така што ќе ги следиме правилата кои важат за степен со природен експонент?

$2^5 : 2^8 = 2^{5-8} = 2^{-3}$ $\qquad 2^5 : 2^8 = \frac{2^5}{2^8} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}$

Колку би можело да биде 3^0? Имаш ли идеја како би можело да се степенува со нула, а тоа да биде во согласност со правилата кои ги знаеме?

$3^4 : 3^4 = 3^{4-4} = 3^0$ $\qquad 3^4 : 3^4 = \frac{3^4}{3^4} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 1$

- За секој реален број $a \neq 0$ степенот a^0 е еднаков на единица, односно $a^0 = 1$.
- За секој реален број $a \neq 0$ и за секој природен број n, степенот a^{-n} е реципрочна вредност на степенот a^n, односно $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

ПРИМЕР 1

Пресметај: а) 4^{-3} б) 12^0

а) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$ Ја бараме реципрочната вредност на 4^3

б) 12^0 Секој број различен од нула на степен 0 е 1

Со усвоените дефиниции за степените со показател нула и негативен цел број, правилата за операциите со нив се исти како правилата за степени со показател природен број.

За секои реални броеви $a \neq 0$ и $b \neq 0$, и за секои $n, m \in \mathbb{Z}$ важи:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n : a^m = a^{n-m}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $(a : b)^n = a^n : b^n$ $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

ПРИМЕР 2

Пресметај: а) $3^{-3} \cdot 3^4$ б) $3^4 : 3^7$ в) $3^{-2} \cdot 4^{-2}$ г) $2^{-4} : 8^{-4}$ д) $(2^3)^{-2}$

а) $3^{-3} \cdot 3^4 = 3^{-3+4} = 3^1 = 3$

б) $3^4 : 3^7 = 3^{4-7} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

в) $3^{-2} \cdot 4^{-2} = (3 \cdot 4)^{-2} = 12^{-2} = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$

г) $8^{-4} : 2^{-4} = (8 : 2)^{-4} = 4^{-4} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$

д) $(2^3)^{-2} = 2^{3 \cdot (-2)} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

ПРИМЕР 3

Упрости: а) $6a^{-4} \cdot 7a^2$ б) $35b^4 : (7b^2)$ в) $\left(\frac{3}{q^2}\right)^{-3}$

а) $6a^{-4} \cdot 7a^2 = (6 \cdot 7)a^{-4+2} = 42a^{-2} = \frac{42}{a^2}$

б) $35b^4 : (7b^2) = (35 : 7)b^{4-2} = 5b^2$

в) $\left(\frac{3}{q^2}\right)^{-3} = \left(\frac{q^2}{3}\right)^3 = \frac{q^6}{3^3} = \frac{q^6}{27}$

Дропка се степенува со цел негативен показател така што нејзината реципрочна вредност се степенува со спротивниот број на показателот.

ПРИМЕР 4

Културата на бактерии се преполовува секој час по додавањето на антибиотик.
Ако сега има 320 бактерии, колку бактерии ќе има културата по 5 часа?

$$320 \cdot 2^{-5} = 320 \cdot \frac{1}{2^5} = 320 \cdot \frac{1}{32} = 10 \text{ бактерии}$$

По 5 часа културата ќе има 10 бактерии.

Степен со степенов показател рационален број

АКТИВНОСТ

Знаеме дека, на пример,
$4^{\frac{1}{2}} = 2$, бидејќи $2^2 = 4$ $\quad (-27)^{\frac{1}{3}} = -3$, бидејќи $(-3)^3 = -27$.

Ако размислуваме на истиот начин, колку ќе биде $16^{\frac{1}{4}}$, $8^{\frac{1}{3}}$, $(-243)^{\frac{1}{5}}$ и $64^{\frac{1}{6}}$?

Дали постои $(-4)^{\frac{1}{2}}$?

Како што веќе рековме,

- ако a е ненегативен реален број и $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, тогаш ненегативниот број $a^{\frac{1}{n}}$ таков што $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ е степен на бројот a со показател $\frac{1}{n}$, и
- ако a е реален број и $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, тогаш реалниот број $a^{\frac{1}{n}}$ таков што $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ е степен на бројот a со показател $\frac{1}{n}$.

Да забележиме дека $a^{\frac{1}{n}}$ не постои кога $a < 0$ и $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, бидејќи не постои број кој помножен со себе парен број пати ќе даде негативен број.

АКТИВНОСТ

Каков број е степеновиот показател во записот $4^{\frac{3}{2}}$? Објасни ја пресметката:

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Повторно си го поставуваме прашањето како би можеле да степенуваме со рационален број, така што ќе ги следиме правилата кои важат за степен со показател цел број.

Нека $a > 0$ и $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}$ и $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$). Степен на бројот a со показател рационален број $\frac{m}{n}$ се дефинира со $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$.

Нека $a \neq 0$ и $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}$ и $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$). Степен на бројот a со показател рационален број $\frac{m}{n}$ се дефинира со $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$.

ПРИМЕР 5

Пресметај: а) $32^{\frac{1}{5}}$ б) $27^{-\frac{1}{3}}$

а) $32^{\frac{2}{5}} = (32^{\frac{1}{5}})^2 = 2^2 = 4$ По дефиницијата за степен со показател рационален број

б) $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3}$ Ја бараме реципрочната вредност на $27^{-\frac{1}{3}}$

Според дефиницијата за степен со показател рационален број имаме дека правилата за операциите со нив остануваат исти на правилата за степени со показател цел број, **секогаш кога степенувањето има смисла**.

За секои реални броеви $a \neq 0$ и $b \neq 0$, и за секои $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ каде што $m, p \in \mathbb{Z}$ $n, q \in \mathbb{N}$ важи:

$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$ $(a : b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$ $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$

АКТИВНОСТ

Објасни зошто $8^{\frac{2}{3}}$ можеме да го пресметаме на два начина:

$8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$ $8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$

Од правилото степенување на степен произлегува дека $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$

ПРИМЕР 6

Упрости: а) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ б) $7^{\frac{1}{6}} : 7^{\frac{1}{3}}$ в) $3^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{\frac{1}{5}}$ г) $16^{\frac{1}{3}} : 8^{\frac{1}{3}}$ д) $(3^{\frac{1}{5}})^{\frac{3}{4}}$

а) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$ б) $7^{\frac{1}{6}} : 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} = 7^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{7^{\frac{1}{6}}}$

в) $3^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{\frac{1}{5}} = (3 \cdot 7)^{\frac{1}{5}} = 21^{\frac{1}{5}}$ г) $16^{\frac{1}{3}} : 8^{\frac{1}{3}} = (16 : 8)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$ д) $(3^{\frac{1}{5}})^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{20}}$

ПРИМЕР 7

Упрости: а) $5a^{\frac{2}{3}} \cdot 4a^{\frac{1}{2}}$ б) $42a^{\frac{7}{2}} : (6a^{\frac{3}{4}})$ в) $\left(\frac{3}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

а) $5a^{\frac{2}{3}} \cdot 4a^{\frac{1}{2}} = (5 \cdot 4)a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = 20a^{\frac{7}{6}}$

б) $42a^{\frac{7}{2}} : (6a^{\frac{3}{4}}) = 7a^{\frac{7}{2}-\frac{3}{4}} = 6b^{\frac{11}{4}}$

в) $\left(\frac{3}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{c^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{c^3}{3^{\frac{3}{2}}}$

Дропка се степенува со негативен рационален показател така што нејзината реципрочна вредност се степенува со спротивниот број на показателот.

ПРИМЕР 8

Популација на зајаци се зголемува за период од 5 години на број што е степен од почетниот број со основа 4 и почетниот број на зајаци е 4. По 15 години, во живеалиштето имало 256 зајаци. Колку зајаци имало по 10 години?

15 години се 3 периоди по 5 години, 10 години се 2 периоди

По 3 периоди имало 256 зајаци. Значи $4 \cdot 4^{3k} = 256$, а се бара бројот $4 \cdot 4^{3k}$.

По 2 периоди имало $4\left(\frac{256}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 4 \cdot 64^{\frac{2}{3}} = 4 \cdot \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64$ зајаци.

По 10 години имало 64 зајаци.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај:

   а) $7 \cdot 7^{-1}$ б) $4^3 \cdot 4^4 : 4^9$ в) $\frac{3^5 \cdot 3^2}{3^9}$ г) $\frac{10^6 \cdot 10^4}{(10 \cdot 10^2)^2}$

2. Пресметај:

   а) $32^{\frac{1}{5}} \cdot 32^{\frac{4}{5}}$ б) $\left(\frac{1}{27^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-3}$ в) $16^{\frac{7}{4}} : 16^{\frac{1}{2}}$ г) $(25^{-\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}}$

3. Упрости:

   а) $8q^7 \cdot 4q^{-30}$ б) $32y^8 : 4y^{-3}$ в) $\left(\frac{6}{t}\right)^{-3}$ г) $(a^2)^{-3}$

4. Упрости:

   а) $14x : (7x^{-\frac{2}{3}})$ б) $4x^{-\frac{4}{3}} \cdot 7x^{-\frac{2}{3}}$ в) $2a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} : 5a^{\frac{1}{3}}$ г) $(8a^{-3} : (27b^9))^{-\frac{1}{3}}$

5. Најди ги вредностите на p и q, ако:

   а) $x^p : x^q = x$ и $x^p \cdot x^q = x^{-7}$ б) $x^p \cdot x^q = x^{\frac{9}{2}}$ и $x^p : x^q = x^{\frac{11}{2}}$

6. Процентниот капацитет на телефонската батерија се преполовува секој час при гледање на видео, до првите 3 часа, а потоа нагло се празни. Ако почетниот капацитет е 80 %, колку ќе биде преостанатиот капацитет по поминати 3 часа?

7. При кристализација на син камен, бакар сулфат пентахидрат, масата на формираниот кристал се удвојува на секои 2 часа. По 6 часа масата на кристалот е 64 грамови. Колку изнесувала масата на кристалот по 4 часа?

8. Компанија за складирање енергија го зголемува бројот на батерии во ветерна електрана. Бројот на батерии расте на секои 3 години така што новиот број е степен од почетниот број со показател $2k$ (a^2, a^4, a^6, ...). По 9 години бројот на батерии изнесува 729. Колку батерии имало по 6 години?

9. Запиши пет изрази еднакви на x^{30}. Обиди се да ги употребиш сите операции со степени со исти основи и користи барем еден член со негативен степенов показател или рационален степенов показател.

2.5. Претставување на броевите во експоненцијална форма

Бројот 3651 можеме да го запишеме на повеќе начини како производ од два броја, од кои едниот е степен со основа 10 и позитивен степенов показател. На пример,

$$\begin{aligned} 3651 &= 3651 \cdot 1 && = 3651 \cdot 10^0 \\ &= 365{,}1 \cdot 10 && = 365{,}1 \cdot 10^1 \\ &= 36{,}51 \cdot 100 && = 36{,}51 \cdot 10^2 \\ &= 3{,}651 \cdot 1000 && = 3{,}651 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Истиот број може да го запишеме како производ од два броја, од кои едниот е степен со основа 10 и негативен степенов показател.

$$\begin{aligned} 3651 &= 3651 \cdot 1 && = 3651 \cdot 10^0 \\ &= 36510 \cdot 0{,}1 && = 36510 \cdot 10^{-1} \\ &= 365100 \cdot 0{,}01 && = 365100 \cdot 10^{-2} \\ &= 3651000 \cdot 0{,}001 && = 3651000 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Што е својствено за записот $3{,}651 \cdot 10^3$ на бројот 3651?

За реален број x велиме дека е запишан во **експоненцијална форма**, ако

$$x = A \cdot 10^n$$

каде што n е цел број и A е реален број таков што $1 \leq |A| < 10$.
Бројот A во записот се нарекува **мантиса** или **главен дел**.

Ваквиот начин на запишување на броевите често го користиме за запишување на многу големи или, пак многу мали броеви.

ПРИМЕР 1

Запиши го во декадна форма бројот даден во експоненцијална форма:
а) $3 \cdot 10^4$ б) $6{,}52 \cdot 10^0$ в) $7 \cdot 10^{-2}$ г) $8{,}434 \cdot 10^{-3}$

За запишување на број од експоненцијална форма во декадна форма ја множиме мантисата со вредноста на степенот. Наоѓаме дека:

а) $3 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10\,000 = 30\,000$
б) $6{,}52 \cdot 10^6 = 6{,}52 \cdot 1\,000\,000 = 6\,520\,000$
в) $7 \cdot 10^{-2} = 7 \cdot 0{,}01 = 0{,}07$
г) $8{,}434 \cdot 10^{-3} = 8{,}434 \cdot 0{,}001 = 0{,}008434$

ПРИМЕР 2

Запиши го во експоненцијална форма бројот:

а) 723 б) 1827,45 в) 0,0006 г) 0,00000127

Прв чекор: Ја поместуваме децималната запирка во бројот така што лево од неа да остане само една ненулта цифра. Добиениот број во интервалот [1, 10) е мантисата.

Втор чекор: Ги пребројуваме местата за кои сме ја поместиле децималната запирка. Со добиениот број степенуваме.

Според правилото наоѓаме дека:

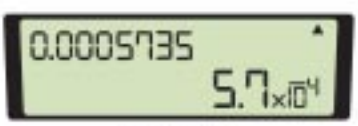
а) $723 = 7{,}23 \cdot 10^2$ Децималната запирка ја поместивме **налево.**
б) $1827{,}45 = 1{,}82745 \cdot 10^3$ Показателот (3) е **позитивен.**
в) $0{,}0006 = 6 \cdot 10^{-4}$ Децималната запирка ја поместивме **надесно.**
г) $0{,}00000127 = 1{,}27 \cdot 10^{-6}$ Показателот (−6) е **негативен.**

ЗАДАЧА 1

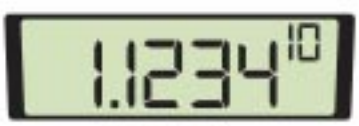
Брзината на светлината е приближно $3 \cdot 10^8$ m/s.

а) Запиши го мерниот број во декадна форма.
б) Колкава е брзината на светлината изразена во km/s? Запиши го мерниот број во експоненцијална форма.

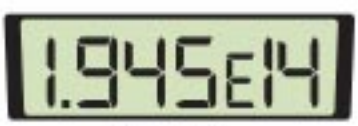
Независно од типот на калкулаторот, претставувањето на броевите во експоненцијална форма е со прикажување на мантисата во централниот дел од дисплејот на калкулаторот, и на степенот десно од мантисата. На слика 1 степенот е прикажан во долниот десен агол, додека на слика 2 е прикажан во горниот десен агол. Дополнително, кај некои калкулатори за основа 10 може да се користи и симболот E, во продолжение на мантисата како што е прикажано на слика 3.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

ПРИМЕР 3

Пресметај ја вредноста на изразот и запиши ја во експоненцијална форма:

а) $(4{,}5 \cdot 10^{-6}) + (4 \cdot 10^{-6})$ б) $(9{,}3 \cdot 10^2) - (2{,}1 \cdot 10^2)$
в) $(3 \cdot 10^3) \cdot (5 \cdot 10^{-5})$ г) $(5{,}2 \cdot 10^2) : (2 \cdot 10^4)$,

Решенијата се добиени без употреба на калкулатор.

Провери ги со помош на калкулатор.

а) $(4{,}5 \cdot 10^{-6}) + (4 \cdot 10^{-6}) = (4{,}5 + 4) \cdot 10^{-6}$
$= 8{,}5 \cdot 10^{-6}$

Ги собираме мантисите според правилото за извлекување на множител пред заграда.

б) $(9{,}3 \cdot 10^{2}) - (2{,}1 \cdot 10^{2}) = (9{,}3 - 2{,}1) \cdot 10^{2}$
$= 7{,}2 \cdot 10^{2}$
Ја намалуваме мантисата на намаленикот за мантисата на намалителот.

в) $(3 \cdot 10^{3}) \cdot (5 \cdot 10^{-5}) = 15 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-5}$
Ги множиме мантисите.
$= 15 \cdot 10^{3-5}$
Го користиме правилото за множење на степени со еднакви основи.
$= 15 \cdot 10^{-2}$
$= 1{,}5 \cdot 10^{1} \cdot 10^{-2}$
Го користиме правилото за запишување на број во експоненцијална форма.
$= 1{,}5 \cdot 10^{-1}$

г) $(5{,}2 \cdot 10^{3}) : (2 \cdot 10^{4}) = 2{,}6 \cdot 10^{2} : 10^{4}$
Ја делиме мантиса на деленикот со мантисата на делителот.
$= 2{,}6 \cdot 10^{2-4}$
Го користиме правилото за делење на степени со еднакви основи.
$= 2{,}6 \cdot 10^{-2}$

ЗАДАЧА 2

Една фабрика произведува компјутерски делови во форма на правоаголник со страни $0{,}6 \cdot 10^{-3}$ m и $7{,}2 \cdot 10^{-3}$ m.

а) Пресметај ја плоштината на компјутерскиот дел во квадратни метри. Запиши го решението во експоненцијална форма.

б) Пресметај го периметарот на компјутерскиот дел во метри. Запиши го решението во експоненцијална форма.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Запиши го во декадна форма бројот даден во експоненцијална форма:

а) $5 \cdot 10^{1}$ б) $9 \cdot 10^{4}$ в) $1{,}5 \cdot 10^{6}$ г) $3{,}142 \cdot 10^{3}$ д) $9{,}1909 \cdot 10^{8}$

ѓ) $7 \cdot 10^{-2}$ е) $8 \cdot 10^{-1}$ ж) $1{,}27 \cdot 10^{-4}$ з) $7{,}213 \cdot 10^{-3}$ ѕ) $2{,}111 \cdot 10^{-7}$

2. Запиши го во експоненцијална форма бројот:

а) 70 000 б) 650 в) 17 200 000 г) 181 856 д) 2372,4

ѓ) 0,6 е) 0,0007 ж) 0,010101 з) 0,00000057 ѕ) 0,0000000202

3. Бројот на жители во една држава е 2 081 012.
Запиши го бројот во експоненцијална форма.

4. Изградбата на стадион за претстојното Светското фудбалско првенство ќе чини приближно 4 милијарди долари (1 милијарда се запишува како $1 \cdot 10^{9}$ во експоненцијална форма).

а) Запиши го бројот во експоненцијална форма.

б) Останатата работа која треба да се заврши ќе чини 0,429 милијарди долари.
Запиши го бројот во експоненцијална форма.

5. Пресметај ја вредноста на изразот и запиши ја во експоненцијална форма:
   а) $(4 \cdot 10^2) + (2 \cdot 10^2)$ б) $(4 \cdot 10^3) - (2 \cdot 10^3)$
   в) $(4 \cdot 10^3) \cdot (2 \cdot 10^2)$ г) $(4 \cdot 10^3) : (2 \cdot 10^2)$

6. Масата на Земјата изнесува $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg. Просечната густина на Земјата изнесува 5515 kg/m³. (волумен = маса : густина)
   а) Пресметај го волуменот на Земјата во кубни метри.
   б) Запиши го решението во експоненцијална форма со точност до 2 децимални места.

7. Дрита вели дека $(7 \cdot 10^5) - (5 \cdot 10^5) = (2 \cdot 10^0)$. Валон вели дека $(7 \cdot 10^5) - (5 \cdot 10) = (2 \cdot 10^5)$. Кој е во право? Образложи го одговорот.

8. Во табелата е дадена популацијата во 2020 година во петте најголеми урбани региони во една држава и нивната површина изразена во квадратни километри.
   Густината на популацијата е бројот на население на површина од 1 km².

Регион	Популација	Површина во km²
А	$1{,}35 \cdot 10^5$	$1{,}09 \cdot 10^2$
Б	$3{,}90 \cdot 10^5$	$6{,}08 \cdot 10^2$
В	$2{,}03 \cdot 10^5$	$8{,}77 \cdot 10^2$
Г	$1{,}24 \cdot 10^5$	$3{,}75 \cdot 10^2$
Д	$3{,}90 \cdot 10^5$	$4{,}44 \cdot 10^2$

   а) Подреди ги регионите според бројноста на популацијата, почнувајќи од најнаселениот.
   б) Подреди ги регионите според големината на површината, почнувајќи од најголемиот.
   в) Пресметај ја густината на населението за секој регион.
   г) Подреди ги регионите според густината на населението, почнувајќи од најгусто населениот.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Истражи и собери по 10 реални многу мали и многу големи вредности, на пример, маса на Земјата, маса на зрно ориз, дијаметар на јадро на атом, растојание од Земјата до Сонцето, брзина на светлина, брзина на автомобил, број на ѕвезди во Млечниот Пат, број на население на Земјата и сл.

а) Секоја вредност запиши ја во експоненцијална форма.

б) Подреди ги од најголема до најмала според степеновиот показател.

в) Пресметај го односот помеѓу некои од величините, на пример колку пати е поголема масата на Земјата од масата на зрно песок.

г) Прикажи ги резултатите преку табели и дијаграми и објасни ги.

д) Објасни зошто експоненцијалниот облик е многу корисен во науката, особено во астрономијата, физиката и хемијата.

2.6. Алгебарски рационални изрази

Цели и дробни рационални изрази

АКТИВНОСТ

а) Со константите 0; 1,5; 2; 4,5 и 9 запиши броен израз во кој ќе бидат назначени операциите собирање, одземање, множење, делење и степенување со показател цел број.
Пресметај ја вредноста на запишаниот израз.

б) Со константите 2; 3,5; 4 и 9, и променливите x, y, z и t, запиши броен израз во кој ќе бидат назначени операциите собирање, одземање, множење, делење и степенување со показател цел број.

Рационален алгебарски израз е низа од конечно многу константи и променливи, сврзани со знаците на операциите собирање, одземање, множење, делење и степенување со показател цел број, кои имаат смисла.

ПРИМЕР 1

Записите $a+b$, $\frac{m^2+5}{m-n}$ и $\frac{1}{p+3}$ се примери на рационални алгебарски изрази.

ЗАДАЧА 1

Запиши израз за пресметување на периметар на триаголник со страни $4x$, $2x$ и $3x$.

Алгебарскиот израз да може да се состои и само од константи, дури и само од една константа или променлива. На пример, a; 1; 7,2 ги сметаме за алгебарски изрази.
Алгебарските изрази што содржат само константи се викаат **бројни изрази**.
Бројот што се добива откако во алгебарскиот израз ќе се заменат соодветните вредности на променливите и ќе се извршат означените операции во него се вика **бројна вредност** на изразот.

ПРИМЕР 2

Бројната вредност на изразот:

а) $3x-1$ за $x=1$ изнесува $3\cdot 1-1=2$ б) $3a^3+5a$ за $a=2$ изнесува $3\cdot 2^3+5\cdot 2=34$

ЗАДАЧА 2

Пресметај ја бројната вредност на рационалниот израз:

а) $4x+5y$, за $x=-4, y=5$ б) $\frac{x-3y}{3xy}$, за $x=6, y=-5$ в) $\frac{4x-3z}{3-xy}$, за $x=4, y=-3, z=0$

Рационални алгебарски изрази во кои не се среќава операцијата делење со променлива или делење со израз што содржи променлива, се викаат **цели рационални алгебарски изрази**.

ПРИМЕР 3

Изразите $2a^2b - 1$, $5x^2 - 3xy$, $\frac{4x}{3}$, $\frac{a^2 - 2b}{4}$ се примери на цели рационални алгебарски изрази.



Рационални алгебарски изрази кои содржат делење со променлива или делење со израз што содржи променлива, се викаат **дробно рационални изрази**.

ПРИМЕР 4

Изразите $\frac{2a-1}{b}$, $\frac{x}{y-2}$ и $\frac{5a}{2b} + 4c$ се примери на дробно рационални изрази, бидејќи содржат делење со променлива или делење со израз што содржи променлива.

ПРИМЕР 5

Во дробно рационалниот израз $\frac{30}{x-4}$ променливата x не може да прими вредност 4, но x може да прими која било друга реална вредност. Запишуваме $\frac{30}{x-4}$, $x \neq 4$.

Вредностите што може да ги добиваат променливите во даден рационален алгебарски израз се викаат **допуштени вредности на променливите**.

ЗАДАЧА 3

Кое е множеството допуштени вредности на променливите во кој било цел рационален израз?

Рационални изрази што имаат исто множество на допуштени вредности и имаат еднакви бројни вредности за сите допуштени вредности на променливите се викаат **идентични рационални изрази**.

ПРИМЕР 6

Изразите

а) $3(a-4)+7$ и $3a-5$ се идентични	Имаат еднакви бројни вредности за кои било вредности на a.
б) $\frac{a^2-4}{a+2}$ и $a-2$ не се идентични	Нивните множества на допуштени вредности за променливите не се еднакви.
в) $\frac{a^2-4}{a+2}$ и $a-2$ за $a \neq -2$, се идентични	За секое $a \neq -2$ имаат исти бројни вредности.

Мономи

АКТИВНОСТ

Во кои од дадените рационални изрази: $2x^2y$, $x+1$, a, 5, $3abc + 7c$, $-0{,}4z$, $m^2 + 5m + 3$ се содржат само операциите множење и степенување со природен број?

Цел рационален алгебарски израз кој ги содржи само операциите множење и степенување со показател природен број се вика **моном**.

ПРИМЕР 7

Изразите $5x$, $-2a^2b$, $-2m$ и $\frac{3}{4}ab^2$ се примери на мономи.

Бидејќи операцијата степенување е специјален случај на операцијата множење може да се каже дека моном е цел рационален израз кој ја содржи само операцијата множење.

Според дефиницијата за моном, секој израз што се состои само од една константа или променлива е моном, бидејќи мономот не е неопходно да ја содржи операцијата множење.

ПРИМЕР 8

а) Изразите x, -2, $-m$ и $0{,}5$ се мономи.

б) Изразот $\frac{4ab^2}{5}$ е моном, бидејќи може да се презапише во облик $\frac{4ab^2}{5} = \frac{4}{5}ab^2 = 0{,}8ab^2$.

ПРИМЕР 9

$\frac{-2ab^2 \cdot 3x^2y}{5} = -\frac{6}{5}ab^2x^2y$

Ако мономот содржи неколку множители кои се константи, нивниот производ може да се запише пред производот на променливите.

Константа што стои пред променливите во мономот се вика **коефициент на мономот**.

Производот на променливите во мономот се вика **главна вредност на мономот**.

Збирот на показателите на променливите кои се појавуваат во мономот се вика **степен на мономот**.

ПРИМЕР 10

a^2b, $-3x$, $\frac{4}{5}ab^2c$ и $-0{,}5t$

Коефициенти на мономите се 1, -3, $\frac{4}{5}$ и $-0{,}5$

Главни вредности на мономите се a^2b, x, ab^2c и t

Степените на мономите се 3, 1, 4, 1

Мономите кои имаат еднакви главни вредности, а се разликуваат само по своите коефициенти се викаат **слични мономи**.

Два слични мономи, чии коефициенти се спротивни броеви, се викаат **спротивни мономи**.

ПРИМЕР 11

а) Мономите $-3a^2b$, $0{,}6a^2b$, $2a^2b$, $\frac{3}{4}a^2b$ и $-a^2b$, се примери на слични мономи.

б) Мономите $7ab^2$ и $-7ab^2$ се примери на спротивни мономи.

ЗАДАЧА 4

Запиши ги коефициентот, главната вредност и степенот на мономот:

а) $-2a^2b^3$ б) $3{,}9x^5y^7$ в) $-2{,}5pq$ г) $\frac{2a^2x^4}{3}$ д) $-x^2yz$

ЗАДАЧА 5

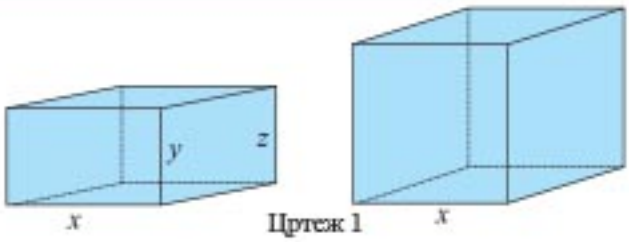
Енергијата на звучниот бран во време од t часа изнесува $7t^4$ џули (J).
Колкава ќе биде енергијата на звучниот бран по 7 часа?

Полиноми

АКТИВНОСТ

Дадени се коцка и квадар (цртеж 1).

Колкава е вкупната плоштина на двете форми, ако должината на работ на коцката е x, а должините на рабовите на квадарот се x, y и z?



Цртеж 1

Сигурно заклучи дека за да ја определиш вкупната плоштина на формите, треба да го определиш збирот од нивните плоштини:

$P_1 = 6x^2$	плоштината на коцката
$P_2 = 2xy + 2yz + 2xz$	плоштината на квадарот
$P = P_1 + P_2$	вкупната плоштина
$P = 6x^2 + 2xy + 2yz + 2xz$	изразот за вкупната плоштина е збир од мономи

Алгебарски збир од конечен број на мономи се вика **полином**.

ПРИМЕР 12

Изразите $3a - 2ax + a^2b^2 - bx$ и $4ax - 3by + x^2y^2$ се примери на полиноми.

Мономите од кои е составен полиномот се викаат **членови на полиномот**.

Полином што содржи два члена се вика уште и **бином**, а полином што содржи три члена се вика **трином**, итн.

ПРИМЕР 13

а) Изразите $a + 2b$ и $x^2 + 5y$ се биноми.

б) Изразите $3a^2 + 2a + 1$ и $x^2 - 2xy + 3y$ се триноми.

Секој моном може да се смета и како полином само со еден член.

Од друга страна секој полином може да содржи една или неколку променливи.

ПРИМЕР 14

Полиномот $5a^2 - 2a^3 + 3a^4 - a + 4$ содржи само една променлива во различни степени.

$3a^4 - 2a^3 + 5a^2 - a + 4$	Заради комутативниот закон, неговите членови може да се подредат во опаѓачки степени на променливата.
$4 - a + 5a^2 - 2a^3 + 3a^4$	Слично, неговите членови може да се подредат по растечки степени на променливата.



Константите што фигурираат во полиномот се викаат **коефициенти на полиномот.**
Степенот на членот со највисок степен се вика **степен на полиномот.**

ПРИМЕР 15

$3x^3 - 4x^2 + 5$ Коефициенти на полиномот се броевите 3, – 4 и 5

Степенот на полиномот е 3.

ПРИМЕР 16

$$\underline{3a^2} - \underline{\underline{b^2}} - \underline{5a^2} + \underline{\underline{4b^2}} = (3a^2 - 5a^2) + (-b^2 + 4b^2)$$
$$= (3 - 5)a^2 + (-1 + 4)b^2$$
$$= -2a^2 + 3b^2$$

Заменувањето на алгебарскиот збир од неколку слични членови во полином со еден идентичен на нив член се вика **сведување на сличните членови на полиномот.**

ЗАДАЧА 6

Амплитудата A на звучниот бран во време од t секунди е $t^2 - 5t + 6$ децибели.

Колку ќе биде големината на амплитудата, изразена во децибели, по 5 секунди?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Најди го множеството допуштени вредности на променливите во изразот:

а) $\frac{a+5}{a-3}$ б) $\frac{x^2+2x-1}{x+2}$ в) $\frac{2ab}{a-b}$

2. Препиши ја во својата тетратка и пополни ја табелата:

Моном	$-4a^2b$	$2{,}5a$	$-ax^2$	$-\frac{x}{3}$	$\frac{2xy^2}{5}$
Коефициент на моном					
Главна вредност на моном					
Степен на моном					

3. Кои од следниве мономи се слични:
а) $-3ab$ б) $\frac{1}{2}a^2x$ в) ab г) $-a^2x$ д) $6a^2x$ ѓ) $-7ax^2$ е) ax^2

4. Запиши го спротивниот моном на мономот:
а) $-6ab$ б) a^2b^2 в) $-2ax$ г) $\frac{x}{3}$ д) $-x^2y$ ѓ) $0{,}5a$

5. Препиши ја во својата тетратка и пополни ја табелата:

Полином	$-7x^2+9x$	$2{,}5a^5+7abc-5ab$	$x^3y-x^2y^2+2xy-3xy^2$
Коефициенти на полиномот			
Степен на полиномот			

6. Дали се идентични изразите:
а) $a+b=a-(-b)$ б) $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ в) $x^3+1=(x+1)(x^2+x+1)$

7. Упрости ги полиномите. а) $3ab-4a^2b^2-7ab^2+2ab^2-ab+4^2b^2$ б) $1{,}5a-2b+0{,}5b-0{,}3a-ab$

8. Количеството на обработени податоци во мегабајти за h часа е $15h^3$.
Колкаво ќе биде количеството на обработени податоци во мегабајти за 3 часа?

9. Висината на растението во милиметри за x недели е $2x^2+5x+6$.
Колкава ќе биде висината на растението после 5 недели?

2.7. Собирање и одземање на цели рационални изрази

Собирање на мономи и полиноми

АКТИВНОСТ

Запиши го алгебарскиот збир на броевите -15, 9, -6, 12 и -7. Потоа запиши го неговиот скратен вид без употреба на загради. Да го најдеме збирот на мономите: $7a^2$, $-5a$, $-3ab$, $2a$ и $-ab$.

$7a^2+(-5a)+(-3ab)+2a+(-ab)$
$=7a^2-\underline{5a}-\underline{\underline{3ab}}+\underline{2a}-\underline{\underline{ab}}$
$=7a^2-3a-4ab$

Го запишуваме алгебарскиот збир на мономите
Го запишуваме во скратен вид без употреба на знаците за собирање и заградите и ги сведуваме сличните членови во добиениот полином.

Два мономи се собираат, така што се запишуваат во вид на алгебарски збир, еден по друг со истите знаци што ги имаат. Потоа, по потреба во добиениот полином се врши сведување.

ЗАДАЧА 1

Најди го збирот на мономите: $15x^2y$, $-5xy$, $-3xy^2$, $2x^2y$ и $-xy$.

ПРИМЕР 1

Најди го збирот на полиномите $5a^2b + 2b$ и $2a - 3a^2b$.

$(5a^2b + 2b) + (2a - 3a^2b)$ — Го запишуваме збирот на полиномите.

$(5a^2b + 2b) + (2a - 3a^2b) = \underline{5a^2b} + 2b + 2a - \underline{3a^2b}$
$= 2a^2b + 2b + 2a$

Кон првиот полином го додаваме последователно секој член од вториот полином и ги сведуваме сличните членови во добиениот полином.

Два полинома се собираат така што кон првиот полином последователно се допишуваат сите членови од вториот полином со истите знаци што ги имаат. Потоа, по потреба во добиениот полином се врши сведување.

ЗАДАЧА 2

Два рефлектори осветлуваат сцена. Интензитетот на светлина во лумени на x метри од изворот изнесува:
Рефлектор А интензитет на светлина $(9x^2 + 5x)$ лумени
Рефлектор Б интензитет на светлина $(7x^2 + 3x + 6)$ лумени
Најди го збирот на интензитетот на светлината од двата рефлектори.

Одземање на полиноми

АКТИВНОСТ

Да се одземе рационален број b од рационален број a значи на бројот a да му се додаде спротивниот број на бројот b, односно $a - b = a + (-b)$.
Размислувајќи на овој начин, најди ја разликата на:

а) бројот 7 со бројот 5 б) бројот 7 со бројот -5 в) бројот -7 со бројот -5

ПРИМЕР 1

Да ја најдеме разликата на мономот $5ab$ со мономот $4a^2$.

$5ab - (+4a^2) = 5ab + (-4a^2)$ — Ја запишуваме бараната разлика во облик на збир.
$= 5ab - 4a^2$ — Ги собираме мономите по правилото за собирање.

Моном се одзема од моном така што кон мономот намаленик се допишува спротивниот моном на мономот намалител. Потоа, по потреба во добиениот полином се врши сведување.

ЗАДАЧА 3

Најди ја разликата на мономот $3ax$ со мономот $-2by$.

ПРИМЕР 2

Најди ја разликата на полиномот $6ax - 5a$ со полиномот $3x^2 - 4ax$

$$(6ax - 5a) - (+3x^2 - 4ax) = \underline{6ax} - 5a - 3x^2 + \underline{4ax}$$
$$= 10ax - 5a - 3x^2$$

Ја запишуваме разликата.
Кон намаленикот го допишуваме секој член од полиномот намалител со спротивен знак и ги сведуваме сличните членови во добиениот полином.

Полиноми се одземаат така што кон полиномот намаленик се допишуваат последователно сите членови на полиномот намалител со спротивни знаци. Потоа, по потреба, во така добиениот полином може да се врши сведување.

ЗАДАЧА 4

Висината во cm по t децении на:
дабово дрво изнесува $(5t^2 + 4t + 3)$ cm
буково дрво изнесува $(3t^2 + t + 7)$ cm
Најди ја разликата на висината на дабовото дрво со висината на буковото дрво по 4 децении.

Ослободување од загради и затворање на загради
При собирањето и одземањето на мономи и полиноми прво ги ставаме нив во загради, а потоа се ослободуваме од заградите. Врз основа на правилата за собирање и одземање на полиноми, можат да се извлечат следните **правила за ослободување од загради.**



Ако пред заградата стои знакот плус (+), заградата може да се избрише, а знаците пред членовите во заградата остануваат непроменети.
Ако пак пред заградата стои знакот минус (−), знакот и заградата можат да се избришат, но сите членови во неа треба да се препишат со спротивни знаци.

ПРИМЕР 3

Според правилата за ослободување од загради имаме

$$3a - (2b - 5c) + (-5a + 4b - c) - (-7a + b - 8) = \underline{3a} - \underline{2b} + \underline{5c} - \underline{5a} + \underline{4b} - \underline{c} + \underline{7a} - \underline{b} + 8$$
$$= 5a + b + 4c + 8$$

Понекогаш станува потребно даден полином или дел од него да се затвори во заграда, а пред неа да стои знакот плус (+) или минус (−). Тоа го вршиме согласно следните **правила за затворање на загради.**



Ако пред заградата во која затвораме даден полином го ставиме знакот плус (+), тогаш сите членови на затворениот полином ги задржуваат своите знаци.
Ако пред заградата во која затвораме даден полином го ставиме знакот минус (−), тогаш сите членови на затворениот полином ги менуваат своите знаци во спротивни.

ПРИМЕР 4

Според правилата за затворање на загради имаме

$3a - b + 5c = +(3a - b + 5c)$ ставаме знак плус (+) пред заграда

$3a - b + 5c = -(-3a + b - 5c)$ ставаме знак минус (–) пред заграда

ЗАДАЧА 5

Ослободи се од заградите и упрости го изразот:

$(5a^3 + 7b - 4bc) - [(5a^3 + 7b) - (8bc + 2ab^2 - 7)] + 12abc + 3.$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Собери ги мономите:
   а) $7x^4, -5x^2, -4x^3, 6x^2$ и $12x^4$ б) $-2xy, 7xy, 5xy$ и $-3xy$

2. Изврши го собирањето на полиномите:
   а) $(5x^2 - ax + a^2) + (3x^2 + 2ax - a^2) + (4ax - 3x^2 + 8)$
   б) $(2a^4 + 3a^3b - 2a^2b^2 - ab^3) + (a^4 - a^3b + 3a^2b^2 + 4ab^3 - b^4)$

3. Изврши го означеното одземање на мономите:
   а) $-5a - (+3a)$ б) $3x - (-2x)$ в) $2ab - (+2ab)$ г) $3ax - (-ax^2)$

4. Изврши го одземањето на полиномите:
   а) $(6a^2x - 2ax^2 + 5) - (4a^2x + ax^2 - 3)$
   б) $(x^3y - 2xy^2 + 3xy - 2) - (-4x^3y + xy - 3xy^2 + 5x^2y + 1)$

5. Ослободи се од заградите и упрости го изразот:
   а) $(2x^2 + 3y^2) - \{(x^2 - 2xy - y^2) + [3x^2 + 2xy - (-5xy + 2y^2)]\}$
   б) $3x^2y - \{xyz - (3xyz - x^2z) + [2x^2y - (5x^2y - 4xyz - x^2z)]\}$

6. Покажи дека вредноста на изразот не зависи од променливите во него:
   а) $x^2 + 2xy + y^2 - (4xy + 3x^2 - 5) + (2xy - y^2 + 2x^2 + 3)$
   б) $y^2 - (xy + 3y^2 - 3x^2 + 7) + (2y^2 + 2xy + 2y^3) - (3x^2 + xy + 2y^3)$

7. Полиномот $3x^2 - 5xy - 5y^2 + y$ претстави го во вид на:
   а) збир од два собироци, од кои едниот е $3x^2 - 5xy$
   б) разлика од два изрази со намаленик $3x^2 - 5xy$

8. Автомобил првиот ден изминал $(3xy^2 + 5x^2y)$ километри, вториот ден изминал 2 пати повеќе, а третиот ден 3 пати повеќе отколку двата дена заедно. Колку километри изминал автомобилот за три дена?

9. Поместувањето на две тела во метри по t секунди изнесува:
   Тело A се поместува за $(5t^2 + 7t + 12)$ метри
   Тело B се поместува за $(3t^2 + 4t + 9)$ метри
   Најди ја разликата на поместувањето на телото A со поместувањето на телото B.

2.8. Множење на цели рационални изрази

Множење на мономи

АКТИВНОСТ

Дали се еднакви производите:

а) $a \cdot b$ и $b \cdot a$ б) $(a \cdot b) \cdot c$ и $a \cdot (b \cdot c)$,

каде a, b и c се произволни рационални броеви? Образложи го одговорот.

Да го најдеме производот на мономите $-5ab^2c$ и $3a^3bx$.

$-5ab^2c \cdot 3a^3bx = (-5 \cdot 3)(a \cdot a^3) \cdot (b^2 \cdot b) \cdot c \cdot x$ Заради комутативниот и асоцијативниот закон на множењето

$= -15a^4b^3cx$ Го извршуваме множење во секоја заграда

Мономи се множат така што прво се множат нивните коефициенти, а потоа и сите степени на нивните главни вредности што имаат иста основа. Степените што се среќаваат само во еден моном се пренесуваат во производот со истите показатели.
Слично постапуваме и кога треба да помножиме повеќе од два монома.

ПРИМЕР 1

Најди го производот на мономите $4a^2b$, $0{,}5ac^3$ и $-3b^3c^2$.

$4a^2b \cdot 0{,}5ac^3 \cdot (-3b^3c^2) = [4 \cdot 0{,}5 \cdot (-3)] \cdot (a^2 \cdot a) \cdot (b \cdot b^3) \cdot (c^3 \cdot c^2) = -6a^3b^4c^5$

ЗАДАЧА 1

Изврши го назначеното множење: а) $2x^2 \cdot (-3xy^2)$ б) $4xy \cdot 5x$ в) $-6ax^2 \cdot (-3a^2x)$

ЗАДАЧА 2

Притисокот на површина од $7x^5$ квадратни метри е $10x^2$ паскали. Помножи за да пресметаш колкава е силата што дејствува на површината.

АКТИВНОСТ

Изврши го степенувањето: а) $2^4 \cdot 3^4$ б) $4^2 \cdot 4^4$ в) $(3^3)^2$

Според кои правила го изврши степенувањето?

Моном се степенува така што се степенува секој негов множител со степеновиот показател, па потоа добиените степени се множат.

ПРИМЕР 2

Изврши го степенувањето на мономот: а) $(2x^2y^3z^4)^2$ б) $(3a^2xy^3)^4$

а) $(2x^2y^3z^4)^2 = 4x^4y^6z^8$ Го применуваме правилото за степенување на моном

б) $(3a^2xy^3)^4 = 81a^8x^4y^{12}$ Го применуваме правилото за степенување на моном

ЗАДАЧА 3

Пресметај го волуменот на коцка со раб $4a^4b^2c^5$.

Множење на полином со моном

АКТИВНОСТ

Пресметај на два начини:

а) $3(2 + 5)$ б) $(2 + 5)3$ в) $3(2 - 5)$ б) $(2 - 5)3$

Според кој закон ги изврши пресметките?

Да го најдеме производот на полиномот $2a^3 - 3ab^2$ со мономот $4a^2b$.

$(2a^3 - 3ab^2) \cdot (4a^2b) = 2a^3 \cdot 4a^2b - 3ab^2 \cdot 4a^2b$ Го користиме дистрибутивниот закон на множењето

$= 8a^5b - 12a^3b^3$ Го извршуваме назначеното множење на мономите

Полином се множи со моном така што прво секој член од полиномот се множи со мономот, потоа добиените производи се собираат.

ПРИМЕР 3

Најди го производот на полиномот $-5ax^2 + 4xy^3 - 2y + 1$ со мономот $-3a^2xy$.

$(-5ax^2 + 4xy^3 - 2y + 1) \cdot (-3a^2xy) = 15a^3x^3y - 12a^2x^2y^4 + 6a^2xy^2 - 3a^2xy$

ЗАДАЧА 4

Моќноста на светилката зависи од напонот $10t$ во волти и јачината на струјата $t^2 + 4$ во ампери. (моќност = напон · јачина на струја) Помножи за да ја најдеш моќноста на светилката.

Множење на полиноми

АКТИВНОСТ

Најди ја плоштината на големиот правоаголник на цртеж 1.

Потоа, најди ги плоштините на сите четири помали правоаголници и собери ги добиените изрази.

Плоштината на големиот правоаголник е еднаква на збирот на плоштините на четирите помали правоаголници. Запиши го равенството. Што заклучи?



Цртеж 1

Да го најдеме производот на полиномите $2x^2 - 5xy + y^2$ и $4x + 3y$.

Ако вториот полином го означиме со M, односно ако $M = 4x + 3y$, тогаш горниот производ ќе добие облик $(2x^2 - 5xy + y^2) \cdot M$

Според правилото за множење на полином со моном, добиваме

$(2x^2 - 5xy + y^2) \cdot M = 2x^2 \cdot M - 5xy \cdot M + y^2 \cdot M$

Ако сега ја вратиме смената за M добиваме

$$\begin{aligned}(2x^2 - 5xy + y^2) \cdot (4x + 3y) &= 2x^2 \cdot (4x + 3y) - 5xy \cdot (4x + 3y) + y^2 \cdot (4x + 3y) \\ &= 2x^2 \cdot 4x + 2x^2 \cdot 3y - 5xy \cdot 4x - 5xy \cdot 3y + y^2 \cdot 4x + y^2 \cdot 3y \\ &= 8x^3 + 6x^2y - 20x^2y - 15xy^2 + 4xy^2 + 3y^3 \\ &= 8x^3 - 14x^2y - 11xy^2 + 3y^3\end{aligned}$$

Два полиноми се множат така што секој член од едниот полином се множи со секој член од другиот полином, па потоа добиените производи се собираат. На крај, по потреба, се сведува полиномот.

При множење на полиноми, корисно е да ги запишеме производите на првиот полином со секој член од вториот полином, или производите на вториот полином со секој член од првиот полином.

ПРИМЕР 4

Најди го производот $(x + 2) \cdot (3x - y)$

$$(x + 2) \cdot (3x - y) = (x + 2) \cdot 3x + (x + 2) \cdot (-y) = 3x^2 + 6x - xy - 2y$$

$$(x + 2) \cdot (3x - y) = x \cdot (3x - y) + 2 \cdot (3x - y) = 3x^2 - xy + 6x - 2y$$

ЗАДАЧА 5

Изврши го множењето:

а) $(2a^3 - a^2b + 3ab^2 - 5b^3) \cdot (a^2 - 3ab + 2b^2)$ б) $(2x^3 - 5x + 3) \cdot (x^2 - 3x + 2)$

ЗАДАЧА 6

Константна сила $(5t^2 + 6t + 1)$ Њутни дејствува на тело во временскиот интервал $(2t + 1)$ секунди. Помножи за да го пресметаш импулсот (сила · време).

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Помножи ги мономите:

   а) $-5a^2b^3$ и $-2a^3b$ б) x^3y и $-3a^2x^5y^3$ в) $-\frac{3}{4}x^2y^3z$ и $-\frac{4}{7}xy^2$

2. Изврши го множењето:

   а) $(8x^3 - 4x^2y - 5xy^2 + 3y^2) \cdot (-2x^2y)$ б) $(3ab^2c - 7a^2bc^2 - a^2bc) \cdot (-3abc)$

3. Помножи ги полиномите:
   а) $x^2 - xy + 2y + 3x$ и $x - 4y + 5$ б) $3a^4 - 6a^3b + 5a^2b^2 - 7ab^3 - 9b^4$ и $a^2 - 3ab + b^2$

4. Најди го производот:
   а) $(x - y) \cdot (x - 1)$ б) $(y^3 + z^3) \cdot (z - 1)$ в) $(x^2 + z^2 + 1) \cdot (x^2 - z^2 - 1)$

5. Претстави го степенот во вид на производ, а потоа изврши го множењето:
   а) $(a + b)^2$ б) $(a - b)^2$ в) $(a + b)^3$ г) $(a - b)^3$ д) $(a + b)^4$ ѓ) $(a - b)^4$

6. Упрости го изразот:
   а) $(3y - 2) \cdot (5 - 2y) + 6y^2$ б) $(2x - 1) \cdot (4x^2 + 2x + 1) - 4x \cdot (x^2 + 1) + 4x^2$
   в) $2x \cdot (x + 6) - (2x + 1) \cdot (x + 2)$ г) $(5x - 2) \cdot (3x + 5) - (3x + 5) \cdot (x + 2) \cdot (x + 2)$

7. Претстави ги степените во вид на производ, а потоа најди ги производите:
   а) $(x + 1)^2$ б) $(2x - 3)^2$ в) $(x + 2)^3$ г) $(5x - 2)^3$

8. Изврши го множењето:
   а) $(xy - 3) \cdot (x^2 - 2xy + 3y) \cdot (xy + 3)$ б) $(4y^2 - 1) \cdot (2y^3 + 2y) \cdot (4y^2 + 1)$

9. Во експеримент по физика, ученикот ја пресметува вкупната сила која дејствува на едно тело користејќи израз кој вклучува променливо магнетното поле.
   Силата е дадена со производ на полиноми: $(2x + 3)(x^2 - x + 4)$.
   Изврши го множењето на полиномите и определи го степенот на добиениот полином.

2.9. Формули за скратено множење

Во продолжение ќе се запознаеме со пет идентитети познати како **формули за скратено множење**. Да напоменеме дека A и B ќе ни означуваат не само броеви, туку и кои било изрази.

Производ од збир и разлика на два израза

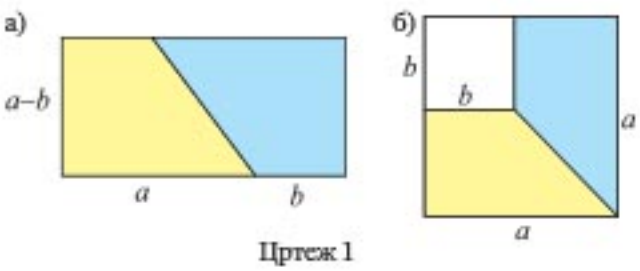
АКТИВНОСТ

Плоштината на правоаголникот со страни $a + b$ и $(a - b)$ на цртеж 1а) изнесува $(a + b) \cdot (a - b)$.

Плоштината на формата на цртеж 2б), добиена со отсекување на квадрат со страна b од квадрат со страна a изнесува $a^2 - b^2$.

Воочи дека двете плоштини се еднакви.

Запиши го равенството. Што заклучи?



Цртеж 1

Нека A и B се кои било изрази. Изразот $A + B$ се вика **збир** на изразите A и B, додека изразот $A - B$ се вика **разлика** на изразот A со изразот B.

Да го пресметаме производот $(A + B) \cdot (A - B)$. Имаме дека

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - \underline{AB} + \underline{AB} - B^2 = A^2 - B^2$ Множиме и сведуваме

Производот од збирот на два изрази и разликата на првиот израз со вториот израз е еднаков на разликата на квадратите на првиот израз со вториот израз:

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2 \quad (1)$$

Формулата (1) се нарекува **формула за производ од збир и разлика на два израза.**

ПРИМЕР 1

$(4x + 3y) \cdot (4x - 3y) = (4x)^2 - (3y)^2 = 16x^2 - 9y^2$ Ја применуваме формулата за **производ од збир и разлика на два израза.**

Формулата за производот од збир и разлика на два израза може да ја употребиме за брзо наоѓање на производот на два броја.

ПРИМЕР 2

$58 \cdot 62 = (60 - 2) \cdot (60 + 20) = 60^2 - 2^2 = 3596$ Ја применуваме формулата за производ од збир и разлика на два израза

Ако погорната формула ја запишеме во обратен ред, ја добиваме формулата $A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$ која се нарекува **формула за разлика на квадрати.**

Разликата на квадратите на два израза е еднаква на производот од збирот на тие изрази и разликата на првиот со вториот израз.

ПРИМЕР 3

$16x^2 - 9y^2 = (4x)^2 - (3y)^2 = (4x + 3y) \cdot (4x - 3y)$ Ја применуваме формулата за разлика на квадрати на два израза.

Формулата за разлика на квадратите на два израза може да ја употребиме за брзо наоѓање на разликата на квадратите на два броја.

ПРИМЕР 4

$237^2 - 236^2 = (237 + 236) \cdot (237 - 236) = 473 \cdot 1 = 473$ Ја применуваме формулата за разлика на квадрати на два израза

ЗАДАЧА 1

Едно тело се движи со брзина од 90 km/h, а друго со 70 km/h.
Колкава е разликата на квадратите од нивните брзини?

Квадрат на збир од два израза

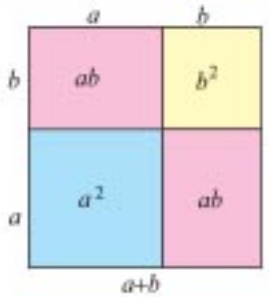
АКТИВНОСТ

Плоштината на квадратот со страна $a + b$ на цртеж 2 изнесува $(a + b)^2$.

Од друга страна, плоштината на квадратот е збир од плоштините на: квадрат со страна a, квадрат со страна b, и два правоаголника со страни a и b.

Запиши го равенството.

Што заклучи?



Цртеж 2

Да го пресметаме квадратот $(A + B)^2$. Имаме дека

$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + \underline{AB} + \underline{AB} + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Множиме и сведуваме

Квадрат на збир од два изрази е збир од квадратите на изразите и нивниот двоен производ:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad (2)$$

Формулата (1) се нарекува **формула за квадрат од збир на два изрази.**

ПРИМЕР 5

$(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2$ Ја применуваме формулата за квадрат на збир од два изрази

$= 9x^2 + 30xy + 25y^2$

Формулата за квадрат на збир од два изрази може да ја употребиме за брзо наоѓање на квадрати на броеви.

ПРИМЕР 6

$76^2 = (70 + 6)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 6 + 6^2$ Ја применуваме формулата за

$= 4900 + 840 + 36 = 5776$ за квадрат на збир од два изрази.

ЗАДАЧА 2

Енергијата на тело со маса m и почетна брзина 3 метри во секунда, откако ќе добие дополнителна брзина v изнесува $\frac{m}{2}(v + 3)^2$ џули. Запиши ја енергијата со помош на формулата за квадрат од збир на два изрази. Потоа, пресметај ја енергијата ако дополнителната брзината на телото изнесува 5 метри во секунда, а неговата маса е 1 килограм.

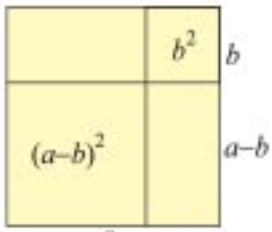
Квадрат на разлика од два изрази

АКТИВНОСТ

Плоштината на квадратот со страна $a - b$ изнесува $(a - b)^2$ (цртеж 3).

Од друга страна, плоштината на квадратот може да се добие ако од плоштината на квадратот со страна a ја одземеме плоштината на двата правоаголници со страни a и b, и ја зголемиме за плоштината на квадрат со страна b.

Запиши го равенството. Што заклучи?



Цртеж 3

Да го пресметаме квадратот $(A - B)^2$. Имаме дека

$(A - B)^2 = (A - B) \cdot (A - B) = A^2 - \underline{AB} - \underline{AB} + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$ Множиме и сведуваме

Квадрат од разликата на два изрази е еднаков на збирот од квадратите на изразите намален за двојниот производ на изразите:

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \qquad (3)$$

Формулата (1) се нарекува **формула за квадрат од разлика на два израза.**

ПРИМЕР 7

$(3a^2b - 2ab)^2 = (3a^2b)^2 - 2 \cdot 3a^2b \cdot 2ab + (2ab)^2$ Ја применуваме формулата за квадрат од разлика на два изрази.

$= 9a^4b^2 - 12a^3b^2 + 4a^2b^2$

Формулата за квадрат на разлика од два изрази може да ја употребиме за брзо наоѓање на квадрати на броеви.

ПРИМЕР 8

$38^2 = (40 - 2)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2$ Ја применуваме формулата за квадрат од разлика на два изрази.

$= 1600 - 160 + 4 = 1444$

ЗАДАЧА 3

Дрон може да лета на максимална надморска височина од $3x^2$ метри и минимална надморска височина од $2x$ метри. Најди го квадратот на разликата на надморските височини?

Разложување на збир на два куба на множители

Да го пресметаме производот $(A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$. Имаме дека

$(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + \underline{A^2B} - \underline{A^2B} - \underline{\underline{AB^2}} + \underline{\underline{AB^2}} + B^3 = A^3 + B^3$

Така доаѓаме до формулата $(A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$

ПРИМЕР 9

$(3+x)\cdot(9-3x+x^2)=3^3+x^3=27+x^3$

Ако погорната формула ја запишеме во обратен ред, ќе ја добиеме формулата

$$A^3+B^3=(A+B)\cdot(A^2-AB+B^2) \qquad (4)$$

која се нарекува **формула за збир на кубови.**

ПРИМЕР 10

$8x^3+27=(2x)^3+3^3=(2x+3)\cdot(4x^2-6x+9)$ Ја применуваме формулата за збир на кубови.

Разложување на разлика на два куба на множители

Да го пресметаме производот $(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)$. Имаме дека

$(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3+\underline{A^2B}-\underline{A^2B}+\underline{AB^2}-\underline{AB^2}-B^3=A^3-B^3$

Така доаѓаме до формулата $(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$

ПРИМЕР 11

$(m-2)\cdot(m^2+2m+4)=m^3-8$

Ако погорната формула ја запишеме во обратен ред, ќе ја добиеме формулата

$$A^3-B^3=(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2) \qquad (5)$$

која се нарекува **формула за разлика на кубови.**

ПРИМЕР 12

$8-x^3=2^3-x^3=(2-x)\cdot(4+2x+x^2)$ Ја применуваме формулата за разлика на кубови.

ЗАДАЧА 4

Изврши ги назначените операции:

а) $(x-1)^3$ б) $(x+2)^3$ в) $(x+1)\cdot(x^2-x+1)$ г) $(x-1)\cdot(1+x+x^2)$

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Најди ги следниве квадрати и кубови:

а) $(x-5)^2$ б) $(3x+2)^2$ в) $(1-3a)^2$ г) $(3x-y+5)^2$

д) $(x+y-z)^2$ ѓ) $(-8x^2-7z)^2$ е) $(2a+b)^3$ ж) $(x-3y)^2$

2. Најди го квадратот на биномот:

а) $(0{,}6x-1)^2$ б) $(1{,}3x+0{,}1y)^2$ в) $\left(5y+\frac{1}{2}\right)^2$ г) $\left(\frac{5}{6}y+2z\right)^2$

3. Изврши ги назначените операции и упрости ги изразите:
   а) $x(x+2)(x-2)-(x-3)(x^2+6x+9)$ б) $(a+b+c)(a+b-c)-(a+b)^2$

4. Пресметај на најбрз начин:
   а) 42^2 б) 29^2 в) 75^2 г) 198^2 д) $9{,}5^2$ ѓ) $1{,}9^2$ ж) $25{,}8^2$

5. Изврши го множењето на најбрз начин:
   а) $(5x+3y)\cdot(5x-3y)$ б) $(1+a)\cdot(1-a)$ в) $(2c+3b)\cdot(2c-3b)$

6. Пресметај на најбрз начин:
   а) $62\cdot 58$ б) $7{,}01\cdot 6{,}99$ в) 87^2-13^2 г) 73^2-27^2

7. Тревна градина има форма на квадрат со страна долга $12x$ метри. Во градината има езерце во форма на квадрат со страна долга $5y$ метри.
   Запиши израз за површината на тревата околу езерцето?

8. Голема слика има 1024^2 пиксели, а помала 800^2 пиксели. Колкава е разликата во бројот на пиксели на поголемата слика со помалата?

ИСТРАЖУВАЊЕ

На цртеж 4 дадена е триаголна шема од природни броеви наречена **Паскалов триаголник**.
Сите броеви на крајната лева и крајната десна страна се единици. Во секој нареден ред е запишан збирот на најблиските два броја од претходниот ред.
Така, на пример,

$2=1+1, 3=1+2, 3=2+1, 4=1+3, 6=3+3, 4=3+1$ итн.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Цртеж 4

Од друга страна, за кои било реални броеви a и b, да ги запишеме степените:

$(a+b)^0=1$

$(a+b)^1=1\cdot a^1+1\cdot b^1$

$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=1\cdot a^2+2\cdot a^1b^1+1\cdot b^2$

$(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)=1\cdot a^3+3\cdot a^2b^1+3\cdot a^1b^2+1\cdot b^3$

Забележи дека собироците ги подредивме, почнувајќи од највисокиот степен на a.

Истражи и откриј ја врската помеѓу коефициентите на собироците и броевите во Паскаловиот триаголник. Допиши нови редици во Паскаловиот триаголник, и без да множиш најди ги, на пример степените:

$(a+b)^5, (a+b)^6, (a+b)^7$ итн.

2.10. Делење на цели рационални изрази

Делење на моном со моном

АКТИВНОСТ

Според кое правило може да го извршиш делењето: а) $x^4 : x^2$ б) $a^7 : b^2$

ПРИМЕР 1

Да го извршиме делењето $12a^3b^2c : (-3ab^2)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$$12a^3b^2c : (-3ab^2) = \frac{12}{-3} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^2}{b^2} \cdot c = -4a^2c$$

Коефициентот на деленикот се дели со коефициентот на делителот. Степените од главната вредност на деленикот се делат со степените што имаат исти основи во делителот. Добиените количници се множат.

Моном се дели со моном така што коефициентот на деленикот се дели со коефициентот на делителот, а одделните степени од главната вредност на деленикот се делат со соодветните степени што имаат исти основи во делителот, па потоа добиените количници се множат.
При делењето на моном со моном, количникот не е секогаш моном (цел рационален израз).

ПРИМЕР 2

Подели го мономот $6a^5$ со мономот $5a^2b$.

$$6a^5 : (5a^2b) = \frac{6}{5} \cdot \frac{a^5}{a^2} \cdot \frac{1}{b} = \frac{6a^3}{5b}$$

Количникот е дробно-рационален израз и го претставуваме со дропка

Според тоа, ако мономот – делител има некоја променлива или степен што не се содржи во деленикот, или се содржи во деленикот со показател поголем од соодветниот показател во деленикот, тогаш количникот е дробно-рационален израз.

ЗАДАЧА 1

Најди го количникот: а) $10x^2y^4z : (5xy^2)$ б) $-4x^2y^3 : (8xy^3)$ в) $9x^4yz : (12xy^2z)$ г) $b^2cxy : (3bc^2x^2)$

Делење на полином со моном

АКТИВНОСТ

Пресметај ги количниците со помош на правилото за делење на алгебарски збир со број:
а) $(7 - 5 + 6) : 2$ б) $(4^2 - 16^3 + 2^4) : 2^2$

ПРИМЕР 3

Да го поделиме полиномот $6a^5b^3 - 5a^4b + 7{,}6a^3b^2c^2$ со мономот $2a^3b$.

Според правилото за делење на алгебарски збир со број, добиваме

$(6a^5b^3 - 5a^4b + 7{,}6a^3b^2c^2) : (2a^3b) = 6a^5b^3 : (2a^3b) - 5a^4b : (2a^3b) + 7{,}6a^3b^2c^2 : (2a^3b) = 3a^2b^2 - 2{,}5a + 3{,}8bc^2$

Полином се дели со моном така што секој член од полиномот се дели со даденият моном, а добиените количници се собираат.

ПРИМЕР 4

Изврши го делењето на полиномот $-12x^4 + 9x^3y - 6x^2y^2$ со мономот $-3x^2$.

$(-12x^4 + 9x^3y - 6x^2y^2) : (-3x^2) = -12x^4 : (-3x^2) + 9x^3y : (-3x^2) - 6x^2y^2 : (-3x^2) = 4x^2 - 3xy + 2y^2$

ЗАДАЧА 2

Вкупната енергија што ја троши група клетки за одреден процес е пропорционална со полиномот $16x^4y^2 + 24x^3y^3$. Енергијата што ја троши секоја поединечна клетка е пропорционална со полиномот $8x^3y^2$. Колку енергијата троши една клетка во однос на вкупната енергија што ја троши групата клетки?

Делење на полином со полином

АКТИВНОСТ

Ако $(2x^2 - 5) \cdot (3x - 2) = 6x^3 - 4x^2 - 15x + 10$, тогаш на што е еднакво

$(6x^3 - 4x^2 - 15x + 10) : (2x^2 - 5)$, и $6x^3 - 4x^2 - 15x + 10 : (3x - 2)$?

Како е добиен првиот член на производот $6x^3 - 4x^2 - 15x + 10$?

Да се подели еден полином со друг, значи да се најде трет полином кој помножен со вториот полином го дава првиот.

ПРИМЕР 5

$(a^2 - 4) : (a + 2) = (a - 2)$ бидејќи $(a + 2) \cdot (a - 2) = (a^2 - 4)$

Количникот при делење на полином со полином само во ретки случаи може да се изрази во вид на полином или моном. Во секој друг случај, количникот на два полиноми го запишуваме како дробно-рационален израз.

ПРИМЕР 6

$(a^2 + b^2) : (a + b) = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$ Не постои полином кој помножен со $a + b$ дава $a^2 + b^2$.

Нека A и B се дадени полиноми, такви што $B \neq 0$. При делење на полиномот A со полиномот B се добива количник (полином) Q и остаток (полином) R.
Запишуваме $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ или $A = B \cdot Q + R$.
Ако $R = 0$ велиме дека полиномот A е **делив** со полиномот B.

ПРИМЕР 7

$(x - 3 + 2x^2) : (3 + 2x) =$

$(2x^2 + x - 3) : (2x + 3) = x - 1$

$\pm 2x^2 \pm 3x$

$-2x - 3$

$\mp 2x \mp 3$

0

Запишуваме
$(x - 3 + 2x^2) : (3 + 2x) = x - 1$

Деленикот и делителот се подредуваат по степените на променливата, од најголемиот кон најмалиот.

Првиот член од деленикот $2x^2$ се дели со првиот член од делителот $2x$ и се добива првиот член од количникот, x.

Првиот член од количникот се множи со делителот и добиениот производ се одзема од деленикот.

Добиениот прв остаток е $-2x - 3$.

Првиот член од првиот остаток се дели со првиот член од делителот и се добива вториот член на количникот, -1.

Вториот член од количникот се множи со делителот и добиениот производ се одзема од првиот остаток $-2x - 3$.

Добиваме втор остаток нула, со што го завршуваме делењето.

ЗАДАЧА 3

Подели го полиномот $x^2 - 1 + x + 2x^3$ со полиномот $1 + x + x^2$.

ПРИМЕР 8

Подели го полиномот $x^4 - x^2 + 2$ со полиномот $x^2 - x + 1$.

$(x^4 - x^2 + 2) : (x^2 - x + 1) = x^2 + x - 1$

$\pm x^4 \mp x^3 \pm x^2$

$x^3 - 2x^2 + 2$

$\pm x^3 \mp x^2 \pm x$

$-x^2 - x + 2$

$\mp x^2 \pm x \mp 1$

$-2x + 3$

Првиот член на третиот остаток $-2x + 3$ не е делив со првиот член на делителот, со што го завршуваме делењето.

Запишуваме $(x^4 - x^2 + 2) : (x^2 - x + 1) = x^2 + x - 1 + \frac{-2x + 3}{x^2 - x + 1}$

Кај полиноми со повеќе променливи, деленикот и делителот ги подредуваме по степените на една од променливите, од најголемиот кон најмалиот.

ПРИМЕР 9

Подели го полиномот $17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4$ со полиномот $x^2 + 2y^2 - 3xy$.

$(17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4) : (x^2 + 2y^2 - 3xy) = 3x^2 + 11y^2$
$(3x^4 - 9x^3y + 17x^2y^2 - 33xy^3 + 22y^4) : (x^2 - 3xy + 2y^2) = 3x^2 + 11y^2$
$\pm 3x^4 \mp 9x^3y \pm 6x^2y^2$
$11x^2y^2 - 33xy^3 + 22y^4$
$\pm 11x^2y^2 \mp 33xy^3 \pm 22y^4$
0

Запишуваме $(17x^2y^2 + 3x^4 - 33xy^3 - 9x^3y + 22y^4) : (x^2 + 2y^2 - 3xy) = 3x^2 + 11y^2$

ЗАДАЧА 4

Еден архитект дизајнира декоративни стаклени панели за зграда. Вкупната површина на стаклото со кое располага е $(18x^3 + 12x^2)$ квадратни метри. Секој стаклен панел изнесува $(6x^2 + 4x)$ квадратни метри.

а) Колку панели може да направи архитектот од стаклото со кое располага?

б) Дали ќе му преостане стакло?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Изврши го делењето на мономите:

а) $12x : (-3)$ б) $(-6a^3b^2c) : (-2a^2bc)$ в) $3x^2y^2z : (-5x^2yz)$ г) $-9ab^2 : 3ab$

2. Изврши го делењето:

а) $(12a - 15b) : 3$ б) $(4x^3y - 12x^4y^3) : (-4x^2y)$

в) $(6a^2x^4 - 9a^3x^5 + 15a^4x^3) : ax^3$ г) $(-15a^3x^5 + 10a^4x^4 - 25a^5x^3) : (-5a^3x^3)$

3. Изврши ги назначените операции во изразите:

а) $(a^2 - 2ab) \cdot 3a + (6ab^3 - 12a^4b^2) : 3ab$ б) $(15a^2x^3 - 6a^3x^2) : (-3a^2x^2) - 2x^2 \cdot (3 + 4a^2x)$

в) $(x + 3y)(x - 3y) - \frac{1}{4}(2x + y)(2x - y) : \frac{y}{2}$ г) $(10a^7x^4 - a^8x^3) : (-0{,}3a^2x^2) + 10a^2 \cdot (0{,}2a^2x + 1)$

4. Изврши го делењето на полиномите:

а) $(x^4 + x + 1) : (x^3 + x + 1)$ б) $(3x^2 + 4x - 2) : (2x^2 - 3x + 5)$

в) $(6a^3b - 11a^2b^2 + b^4) : (3a - b)$ г) $(3x^5 - 8x^4 + 8x^3 - 5x^2 + 3x - 1) : (x^2 - 2x + 1)$

5. Провери дали полиномот $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x - 3$ е делив со биномот:

а) $x - 2$ б) $x - 1$ в) $x + 2$ г) $x + 3$

6. Со помош на формулите за скратено множење, изврши го делењето:

а) $(x^2 + 2x + 1) : (x + 1)$ б) $(x^3 - y^3) : (x^2 + xy + y^2)$ в) $(a^3 + 8) : (a + 2)$

г) $(1 - 9x^2) : (1 + 3x)$ д) $(9 - 12x + 4x^2) : (3 - 2x)$ ѓ) $(x^3 - 8) : (x - 2)$

7. Лабораторија за физика ја проучува работата што ја извршува машина која применува сила за да придвижи предмет. Вкупната работа извршена од машината е $(20x^3 + 5x^2 + 10x)$ џули. Работата што ја извршува машината во текот на една секунда изнесува $5x$ џули. Колку секунди ѝ се потребни на машината за да ја изврши вкупната работа?

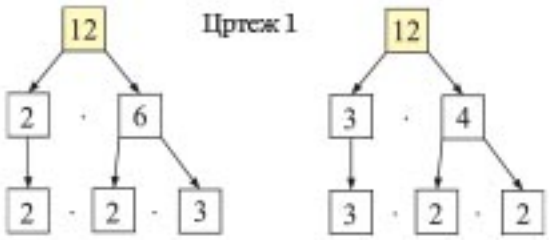
8. Инженер поставува кабли во зграда која е во изградба. Вкупната должина на кабелот со кој располага изнесува $(24x^3 + 36x^2 + 12x)$ метри кабел. За секој стан му се потребни $(6x^2 + 9x + 3)$ метри кабел. Во колку станови може постави кабли? Колку метри кабел ќе му преостанат?

2.11. Начини на разложување на полиноми на прости множители

Разложување на полиноми на прости множители

АКТИВНОСТ

Претставувањето на број во вид на производ од прости множители се вика **разложување на бројот на прости множители.**
Разгледај го дрвото на цртеж 1 и објасни го разложувањето на бројот 12 на прости множители.



Цртеж 1

$2a + 2b = 2(a + b)$ Полиномот е претставен во вид на производ од моном и полином со примена на дистрибутивниот закон на множењето во однос на собирањето

Претставувањето на цел рационален израз во вид на цели рационални изрази кои понатаму не може да се разложуваат се вика **разложување на полиномот на прости множители.**

За разложување на полиномите, не постои општо правило со кое се извршуваат потребните трансформации. Овде ќе посочиме неколку постапки за разложување на полиномите коишто најчесто се применуваат.

Разложување со извлекување на заеднички множител пред заграда

АКТИВНОСТ

Изврши го множењето а) $3(x + y)$ б) $(x + y)\,3$.

Откако ќе го извршиш множењето спореди ги добиените производи.

Разложувањето на полиномите на множители со извлекување на заеднички множител пред заграда се врши со помош на дистрибутивниот закон на множењето. Така, од идентитетите

$m(a + b - c) = ma + mb - mc$ и $(a + b - c)\,m = am + bm - cm$

со помош на левиот и десниот дистрибутивен закон се добива:

$ma + mb - mc = m(a + b - c)$ и $am + bm - cm = (a + b - c)\,m$

ПРИМЕР 1

Разложи го на прости множители полиномот $10a^3bx^2 - 5a^3b^2x - 15a^2b^3$.

Бројот 5 е заеднички делител на сите коефициенти на полиномот.

Сите членови на полиномот имаат уште и заеднички множители a и b во различни степени. Тие може да се извлечат пред заграда со најниските степенови показатели, a на втор и b на прв степен.

Променливата x не е заеднички множител, бидејќи не се содржи во третиот член.

Според тоа, заеднички множител на сите членови на дадениот полином е мономот $5a^2b$.

Најдениот моном го извлекуваме пред заграда, а во заградата го запишуваме количникот од делењето на дадениот полином и заедничкиот множител $5a^2b$:

$10a^3bx^2 - 5a^3b^2x - 15a^2b^3 = 5a^2b(2ax^2 - abx - 3b^2)$



Ако сите членови на даден полином имаат еден ист заеднички множител, тој може да се извлече пред заграда. Тогаш во заградата останува полиномот што се добива кога дадениот полином ќе се подели со извлечениот заеднички множител пред заграда.

ПРИМЕР 2

Пред заградата може да се извлече и само множителот -1.

а) $b - a = -(-b + a) = -(a - b)$ б) $1 - x = -(x - 1)$

Заедничкиот множител што се извлекува пред заграда може да биде не само моном, туку и полином.

ПРИМЕР 3

Разложи го на прости множители полиномот $2a(x - 3) + b(x - 3) - 5a(x - 3)$.

$2a(x - 3) + b(x - 3) - 5a(x - 3) = (x - 3)(2a + b - 5a)$

ЗАДАЧА 1

Разложи го на прости множители полиномот

а) $-x^4 - x^7 - x^3$ б) $12x^2y - 18xy - 30xy^3$ в) $(y + 3)(x + 5) - (-y - 3)$

ЗАДАЧА 2

Вкупната енергија на тело што се движи со брзина v (m/s) може да се изрази како $5v^2 + 10v$ џули. Разложи го полиномот на множители за полесно да ја пресметаш енергијата за определена брзина.

Разложување со групирање на членовите

Разложувањето на полиномите на множители со групирање на членовите се врши според правилото за множење на полином со полином:

$(a-b)(c+d)=(a-b)c+(a-b)d=ac-bc+ad-bd.$

Ако полиномот треба да се разложи на множители, трансформацијата ја извршуваме во обратен редослед:

$ac-bc+ad-bd=(a-b)c+(a-b)d=(a-b)(c+d).$

Тука ги групираме првиот со вториот член и од нив го извлековме c пред заграда, потоа ги групираме третиот и четвртиот член и од нив извлекуваме d пред заграда.

Во добиениот израз $(a-b)c+(a-b)d$, заедничкиот множител е $a-b$. Со извлекување на тој множител пред заграда го добиваме разложувањето $(a-b)(c+d)$.

Овој начин на разложување на полином на множители се вика **разложување со групирање**.

Да го разложиме на прости множители полиномот $3ax+2b-bx-6a$.

$3ax+2b-bx-6a=(3ax-6a)+(2b-bx)=$ Ги групираме првиот со четвртиот и вториот со третиот член.

$=3a(x-2)-b(x-2)=$ Извлекуваме заеднички множител $3a$ од првата група и b со знак „–“ од втората група.

$=(x-2)(3a-b)$ Го извлекуваме полиномот $x-2$ пред заграда како нов заеднички множител.

Членовите на даден полином се групираат така што секоја група има заеднички множител. По извлекувањето на заедничкиот множител со соодветниот знак од секоја група пред заграда, во заградите треба да се добие еден ист полином. Потоа, тој полином се извлекува пред заграда како нов заеднички множител.

ПРИМЕР 4

Разложи го полиномот на прости множители:

а) $2xy-2y-x+1$ б) $ax+bx+kay+kby$

а) $2xy-2y-x+1=2y(x-1)-(x-1)=(x-1)(2y-1)$

б) $ax+bx+kay+kby=(a+b)x+(a+b)ky=(a+b)(x+ky)$

ЗАДАЧА 3

Еден механички систем има енергија дадена со полиномот x^3+3x^2+2x+6. Разложи го полиномот на прости множители со цел да се поедностават испитувањата за кои вредности системот се однесува различно.

Разложување со примена на формулите за скратено множење

АКТИВНОСТ

Пресметај на најбрз начин:

а) 65^2-64^2 б) $3^2+2\cdot3\cdot4+4^2$ в) $4^2-2\cdot4\cdot7+7^2$ г) 4^3+5^3 д) 2^3-7^3

Според кои формули за скратено множење ги изврши пресметките?

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$
$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$
$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

Некои полиноми може да се разложат на множители, со примена на формулите за скратено множење, запишани во обратен распоред на страните:

ПРИМЕР 5

Разложи го полиномот на прости множители:

а) $x^2 - 25$ б) $9x^2 - y^2$ в) $a^2x^2 - b^2y^2$

а) $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$
$x^2 - 5^2$

б) $9x^2 - y^2 = (3x - y)(3x + y)$
$(3x)^2 - y^2$

в) $a^2x^2 - b^2y^2 = (ax - by)(ax + by)$
$(ax)^2 - (by)^2$

ПРИМЕР 6

Разложи го полиномот на прости множители:

а) $x^2 + 8x + 16$ б) $25y^2 - 10y + 1$ в) $16a^2 - 24ab + 3b^2$

а) $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$
$x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2$

б) $25y^2 - 10y + 1 = (5y - 1)^2$
$(5y)^2 - 2 \cdot (5y) \cdot 1 + 1^2$

в) $16a^2 - 24ab + 3b^2 = (4a - 3b)^2$
$(4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 3b + (3b)^2$

ПРИМЕР 7

Разложи го полиномот на прости множители:

а) $8x^3 + 1$ б) $y^3 - 8$ в) $27a^3 - b^3$

а) $8y^3 + 1 = (2y + 1)(4y^2 - 2y + 1)$
$(2y)^3 + 1^3$

б) $y^3 - 8 = (y - 2)(y^2 + 2y + 4)$
$y^3 - 2^3$

в) $8a^3 - b^3 = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$
$(2a)^3 - b^3$

ЗАДАЧА 4

Разложи го полиномот на прости множители:

а) $(3x + 2)^2 - 16y^2$ б) $49x^2 + 56xy + 16y^2$ в) $25a^2 - 30ab + 16b^2$
г) $a^3b^3 + 125$ д) $27y^3 - 8z^3$

Разложување со последователна примена на неколку начини

Во некои случаи, за да се изврши до крај разложувањето на полиномот, потребно е да се применат последователно некои од погорните три начини.

ПРИМЕР 8

Разложи го полиномот на прости множители:
а) $24x^3y^2 - 3y^2$ б) $3x^3y^2 - 15x^2y + 3x^3y - 15x^3$

а) $24x^3y^2 - 3y^2 = 3y^2(8x^3 - 1)$
$= 3y^2(2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$

б) $3x^3y^2 - 15x^2y + 3x^3y - 15x^3 = 3x^2(y^2 - 5y + xy - 5x)$
$= 3x^2(y(y - 5) + x(y - 5))$
$= 3x^2(y - 5)(y + x)$

Прво гледаме дали сите членови на полиномот имаат заеднички множители кои се извлекуваат пред заграда.
Потоа, гледаме дали полиномот што се добива во заградата може да се разложи со групирање или со примена на некоја од формулите за скратено множење.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

Разложи го полиномот на прости множители:

1. а) $3x + 6y$ б) $2ab - 2ac$ в) $7x^5 + 21x^3$
г) $27ab^3 - 9b^4$ д) $a^2y - ay^3$ ѓ) $9ax - 6ay + 12az$

2. а) $2a(b - 3) + 5c(b - 3)$ б) $a(x + 1) - b(x + 1)$ в) $5(x + y) - 2(x + y)^2$
г) $2(y - x)y^2 - x^2(y - x)$ д) $3(x - y)^2 - (x + y)(x - y)$ ѓ) $a(x^2 + 1) - b(x^2 + 1) - c(x^2 + 1)$

3. а) $a^2b^2 - 4$ б) $100x^2 - 1$ в) $\frac{1}{9}a^2 - c^2$ г) $16 - a^4$

4. а) $a^3 - 8$ б) $27x^3 + 1$ в) $8m^3 - n^3$ в) $x^3y^3 - z^3$

5. а) $5ax^2 - 10ax - bx + 2b - x + 2$ б) $xyz + x^2y^2 + 3x^4y^5 + 3x^3y^4z - xy - z$
в) $ax^3 + bx^2y + cx^2 + 3ax + 3by + 3c$ г) $12mx^2 - 9my + 15m - 8nx^2 - 6ny - 10n$

6. а) $4a^2 - b^2 - 2bc - c^2$ б) $x^2 - 3x - y^2 + 3y$ в) $xa^3 - xb^3 - ya^3 + yb^3$
г) $9x^2 - (y^2 + z^2)^2$ д) $9(a - b)^2 - 4(a + b)^2$ ѓ) $x^2 - y^2 - x + y$

7. Пресметај ја вредноста на изразот на најбрз начин:
а) $3ab - 0{,}5a$, ако $a = 25$ и $b = 3{,}5$ б) $4x^2y - 20xy^2$, ако $x = 2{,}4$ и $y = 0{,}5$
в) $327 \cdot 35 + 73 \cdot 35$ г) $285^2 - 215^2$ д) $475^2 - 25^2$

8. Вкупен број на бактерии во една колонија t часови по започнувањето на експериментот изнесува $3t^2 + 6t$. Разложи го полиномот на множители и пресметај го бројот на бактерии 15 часа по започнувањето на експериментот.

9. Еден инженер дизајнира метална правоаголна плоча чија површина е дадена со $(x^2 + 5x + 6)$ квадратни метри. Разложи го изразот на множители за да најдеш можна должина и ширина на плочата.

2.12. Најголем заеднички делител (НЗД) и најмал заеднички содржател (НЗС) на цели рационални изрази

Најголем заеднички делител на цели рационални изрази

АКТИВНОСТ

Најди НЗС (18, 24) и објасни ја постапката.



Заеднички делител на два или повеќе цели рационални изрази е цел рационален израз со кој се дели без остаток сите дадени рационални изрази.

ПРИМЕР 1

а) $2ax^2$ и a^4xy^2 Заеднички делители се 1, a, x и ax.

б) $ab(a-b)$ и $b(a-b)^2$ Заеднички делители се 1, b, $a-b$ и $b(a-b)$.



Заеднички делител на неколку цели рационални изрази $A_1, A_2, ..., A_n$ којшто содржи најмногу заеднички множители со најголем показател се вика **најголем заеднички делител** на тие изрази, и се означува со НЗД $(A_1, A_2, ..., A_n)$

ПРИМЕР 2

Најди го најголемиот заеднички делител на:

а) мономите $14a^2b^2x$ и $42a^2b^3xy^2$ б) полиномите $ab(a-b)$ и $b(a-b)^2$

а) $14a^2b^2x$ и $42ab^3xy^2$

НЗД $(14, 42) = 14$ Го наоѓаме НЗД за сите коефициенти

НЗД $(14a^2b^2x, 42ab^3xy^2) = 14ab^2x$ Ги допишуваме сите заеднички променливи така што секоја од нив се зема со најмалиот показател со кој се појавува во мономите.

б) $ab(a-b)$ и $b(a-b)^2$

НЗД $(ab(a-b), b(a-b)^2) = b(a-b)$ Ги множиме сите заеднички прости множители кои имаат најмал показател.

ПРИМЕР 3

Најди НЗД $(3x^2+6x+3, 9x^2-9, 6x+6)$.

$3x^2+6x+3 = 3(x^2+2x+1) = \underline{3(x+1)^2}$ Полиномите ги разложуваме на прости множители.

$9x^2-9 = 9(x^2-1) = \underline{9(x-1)(x+1)}$

$6x+6 = \underline{6(x+1)}$

НЗД $(3x^2+6x+3, 9x^2-9, 6x+6) = 3(x+1)$ Ги множиме сите заеднички прости множители кои имаат најмал показател.

ПРИМЕР 4

НЗД $(x-y, 3x^2+y) = 1$

Изразите $x-y$ и $3x^2+y$ се **заемно прости изрази**.

ЗАДАЧА 1

Во биолошки експеримент, растот на две растенија се успорува со различна стапка во зависност од недостатокот на хранливи материи x:

Растение А со стапка $\frac{20}{x^2-1}$

Растение В со стапка $\frac{15}{x^2-6x+9}$.

Најди НЗД на именителите x^2-1 и x^2-6x+9.

Најмал заеднички содржател на цели рационални изрази

АКТИВНОСТ

Најди НЗС (12, 15) и објасни ја постапката.

Заеднички содржател на два или повеќе цели рационални изрази е цел рационален израз кој се дели без остаток со секој од дадените изрази.

ПРИМЕР 5

$4a^3b$ и $6a^2x^4$ Заеднички содржатели се $12a^3bx^4$, $24a^5b^3x^6$, $60a^3bx^5$ итн.

Сигурно забележа дека неколку цели рационални изрази имаат бесконечно многу заеднички содржатели.

Заеднички содржател на неколку цели рационални изрази $A_1, A_2, ..., A_n$, кој содржи најмалку заеднички множители со можно најмали показатели, се вика **најмал заеднички содржател** на тие изрази и се означува со НЗС $(A_1, A_2, ..., A_n)$

ПРИМЕР 6

Најди го најголемиот заеднички содржател на:
а) мономите $4a^3b$ и $6a^2x^4$ б) полиномите $15x^3y^2 - 15xy^4$ и $6x^2y + 12xy^2 + 6y^3$

а) $4a^3b$ и $6a^2x^4$

НЗС $(4, 6) = 12$ Го наоѓаме НЗС за сите коефициенти

НЗС $(4a^3b, 6a^2x^4) = 12a^3bx^4$ Ги допишуваме сите заеднички и незаеднички променливи, така што секоја од нив се зема со најголемиот показател со кој се јавува во мономите.

б) $15x^3y^2 - 15xy^4$ и $6x^2y + 12xy^2 + 6y^3$

$15x^3y^2 - 15xy^4 = 15xy^2(x^2 - y^2) = \underline{15xy^2(x - y)(x + y)}$

$6x^2y + 12xy^2 + 6y^3 = 6y(x^2 + 2xy + y^2) = \underline{6y(x + y)^2}$

Полиномите ги разложуваме на прости множители.

НЗС $(15x^3y^2 - 15xy^4, 6x^2y + 12xy^2 + 6y^3) = 30xy^2(x - y)(x + y)^2$
Ги множиме сите прости множители, така што секој од нив се зема со најголемиот показател.

ЗАДАЧА 3

Во еден физички експеримент, два различни сензори ја мерат брзината на објект што се движи во зависност од времето t изразени во секунди:
Сензорот А мери брзина $\frac{50}{t^2 - 9}$ метри во секунда,

Сензорот В мери брзина $\frac{30}{t^2 - 4t + 3}$ метри во секунда.

Најди НЗС на именителите $t^2 - 9$ и $t^2 - 4t + 3$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Најди НЗД за броевите:
   а) 42 и 18 б) 105 и 45 в) 30 и 75 г) 12, 32, 40 и 56.
2. Најди го најголемиот заеднички делител на изразите:
   а) $3ab$ и $12ab^2$ б) $15x^3y^2$ и $24x^2y^3$ в) $5a(a + b)^2$ и $8a^2b(a + b)^3$
   г) $x^2 - y^2$ и $x^3 + y^3$ д) $x^2y^2 - y^4$, $x^4 - x^2y^2$ и $x^3y - xy^3$
3. Најди НЗС за броевите:
   а) 12, 50, 45 и 18 б) 84, 56 и 21 в) 125, 100 и 450 г) 96, 64 и 180.

4. Најди го најмалиот заеднички содржател на изразите:
   а) $6a^2b^3$, $15ab^2$ и $24a^3bc^2$ б) $a(x+2)$ и $b(x+2)$ в) x и x^2+xy^2
   г) a^2-9b^2 и a^3+3a^2b д) x^2-x, $1-x^2$, $1+x^3$ и x^2+x+1
   ѓ) x^2-4y^2, $3x^2-12xy+12y^2$ и $5y(x-2y)^3$

5. Две колонии бактерии се размножуваат со различна стапка во зависност од концентрацијата на антибиотик x:
   Колонијата А со стапка $\frac{20}{x^2-4x+4}$, а колонијата В со стапка $\frac{15}{x^2-4}$.
   Најди НЗД на именителите x^2-4x+4 и x^2-4.

6. Две машини испуштаат вода од резервоар со различни брзини:
   Машината А со брзина $\frac{40}{y^2-36}$ литри во секунда,
   Машината В со брзина $\frac{60}{y^2-12y+36}$ литри во секунда.
   Најди НЗС на именителите y^2-36 и $y^2-12y+36$.

2.13. Алгебарска дропка. Проширување и скратување на алгебарска дропка

Поим за алгебарска дропка

АКТИВНОСТ

Вкупната сметка што ја направиле x гости во ресторан е $(3x+12)$ денари.
Запиши израз што ќе го претставува износот што треба да го плати секој гостин.
Сигурно запиша дека секој треба да плати $\frac{3x+12}{x}$ денари.
Запишаниот израз е дробно рационален израз бидејќи содржи делење со променлива. Уште повеќе, броителот и именителот се цели рационални изрази.

Дробно рационален израз кој претставува дропка чиј броител и именител се цели рационални изрази се вика **алгебарска дропка**.

ЗАДАЧА 1

Кои од алгебарските изрази се алгебарски дропки:
а) $\frac{2a^3-1}{5}$ б) $\frac{x-3}{y+2}$ в) $\frac{x}{y-7}-3x^2$ г) $\frac{5p}{2q^2-1}$
Образложи го твојот одговор.

Алгебарските дропки, исто како обичните, имаат смисла само кога именителот не им е еднаков на нула. Затоа, **допуштени вредности** на аргументите во една алгебарска дропка се само оние вредности за кои именителот на таа дропка е различен од нула.

ПРИМЕР 1

Дропката $\frac{a+3}{a-4}$, за $a=4$ нема смисла.

Допуштени вредности на аргументот a се сите вредности $a \neq 4$.

ПРИМЕР 2

Дропката $\frac{x^2+1}{x-y}$, за $x=y$ нема смисла

Допуштени вредности на аргументите x и y се сите вредности за кои $x \neq y$.

Проширување и скратување на алгебарска дропка

АКТИВНОСТ

Вредноста на дропката не се менува ако и броителот и именителот ги помножиме (поделиме) со еден ист број што не е нула. На пример,

$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{8}{12}$ и $\frac{6}{8}=\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4}$

Како се вика постапката на множење, односно делење на броителот и именителот на дропка со еден ист број различен од нула?

ПРИМЕР 3

Дадена е алгебарската дропка:

а) $\frac{a}{a+2}$, $a \neq -2$

$\frac{a}{a+2}=\frac{a(a-2)}{(a+2)(a-2)}$ Броителот и именителот ги множиме со цел алгебарски израз $a-2$, $a \neq 2$.

$=\frac{a^2-2}{a^2-4}$, $a \neq \pm 2$ Алгебарска дропка е проширена со цел алгебарски израз $a-2$, $a \neq 2$.

б) $\frac{a(b+2)^2}{3(b-1)(b+2)}$, $b \neq -2$, $b \neq 1$

$\frac{a(b+2)^2}{3(b-1)(b+2)}=\frac{a(b+2)^2:(b+2)}{3(b-1)(b+2):(b+2)}$ Броителот и именителот ги делиме со целиот алгебарски израз $b+2$, $b \neq -2$.

$=\frac{a(b+2)}{3(b-1)}$, $b \neq -2$, $b \neq 1$ Алгебарска дропка е скратена со цел алгебарски израз $b+2$, $b \neq -2$.



За секоја алгебарска дропка $\frac{A}{B}$, $B \neq 0$, и за секој број или цел рационален израз $M \neq 0$, важат идентитетите:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} \text{ и } \frac{A}{B} = \frac{A : M}{B : M}, B \neq 0, M \neq 0.$$

Во случај кога броителот и именителот на алгебарската дропка се помножат со еден ист број или со еден ист цел рационален израз $M \neq 0$, велиме дека алгебарска дропка е проширена со $M \neq 0$, а постапката се вика **проширување на алгебарска дропка.**

ПРИМЕР 4

Во еден лабораториски сад има раствор со маса $\frac{5x}{3(x-1)}$ грама. За да се стандардизираат сите мерења, количеството во секој сад треба да се запише со именител $6x(x-1)$. Со кој израз треба да се прошири дропката?

$$\frac{5x \cdot 2x}{3(x-1) \cdot 2x} = \frac{10x^2}{6x(x-1)}$$ Прошируваме со $2x$

Во случај кога броителот и именителот на алгебарската дропка се поделат со еден ист број или со еден ист цел рационален израз $M \neq 0$, велиме дека алгебарска дропка е скратена со $M \neq 0$, а постапката се вика **скратување на алгебарска дропка.**

ПРИМЕР 5

Во алгебарската дропка $\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, броителот и именителот се мономи што имаат заеднички множители: 6, a^2 и b^2.

Имаме два начини за скратување со цел да ја доведеме до нескратлив облик.

Прв начин:

$$\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2} = \frac{12a^2b^3c : 6}{18a^4b^2 : 6} = \frac{2a^2b^3c : a^2}{3a^4b^2 : a^2} = \frac{2b^3c : b^2}{3a^2b^2 : b^2} = \frac{2bc}{3a^2}, a \neq 0, b \neq 0$$

Броителот и именителот ги делиме последователно со секој множител.

Втор начин:

$$\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2} = \frac{12a^2b^3c : 6a^2b^2}{18a^4b^2 : 6a^2b^2} = \frac{2bc}{3a^2}, a \neq 0, b \neq 0$$

Броителот и именителот ги делиме со производот на множителите $6a^2b^2$, кој е воедно и најголемиот заеднички делител.

Алгебарската дропка $\frac{A}{B}$, која е скратена до крај (со НЗД $(A, B) = K$), или не може да се скрати (ако НЗД $(A, B) = 1$), се вика **нескратлива дропка.**

ПРИМЕР 6

Дали дропките $\frac{2bc}{3a^2}$ и $\frac{7xy^2}{z^2}$ се нескратливи?

$\frac{2bc}{3a^2}$ Нескратлива дропка, бидејќи НЗД$(2bc, 3a^2) = 1$.

$\frac{7xy^2}{z^2}$ Нескратлива дропка како дропка што не може да се скрати, бидејќи НЗД $(7xy^2, z^2) = 1$

ПРИМЕР 7

Автомобил поминал растојание од $60x^2$ km за време од $10x$ часа. Со колкава брзина се движел автомобилот?

$\frac{60x^2}{10x} = 6x$ km/h Скратено со $10x$

Автомобилот возел со брзина од $6x$ km/h.

ПРИМЕР 8

Скрати ја дропката: а) $\frac{6a^2b}{3a^2 - 3ab}, a \neq 0, a \neq b$ б) $\frac{x^2 - 6x + 9}{2x^2 - 6x}, x \neq 3, x \neq 0$

а) $\frac{6a^2b}{3a^2 - 3ab} = \frac{6a^2b}{3a(a - b)}$

$= \frac{2ab}{a - b}, a \neq 0, \neq b$

Ако броителот и именителот се полиноми, тогаш нив ги разложуваме на прости множители.

б) $\frac{x^2 - 6x + 9}{2x^2 - 6x} = \frac{(x - 3)^2}{2x(x - 3)}$

$= \frac{x - 3}{2x}, x \neq 3, x \neq 0$

Потоа, ако во броителот и именителот се појават заеднички множители, тогаш ги кратиме нив.

Сведување на алгебарски дропки на еднаков именител

АКТИВНОСТ

Дропките $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ имаат различни именители. Објасни ја постапката со која дропките се сведени на еднаков именител:

$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$ и $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$.

Со проширување, две или неколку алгебарски дропки со различни именители може да се сведат до алгебарски дропки со еднаков именител.

Постапката се вика постапка **за сведување на еднаков именител.**

За заеднички именител на неколку алгебарски дропки обично се зема производот на сите именители или најмалиот заеднички содржател за именителите на дропките.

ПРИМЕР 9

Сведи ги на најмал заеднички именител дропките: $\frac{a}{2x^2y}$, $\frac{b}{3y}$ и $\frac{c}{4xy}$.

НЗС $(2x^2y, 3y, 4xy) = 12x^2y$

Наоѓаме НЗС на именителите на алгебарските дропки

$12x^2y : (2x^2y) = 6$

$12x^2y : (3y) = 4x^2$

$12x^2y : (4xy) = 3x$

Најдениот НЗС се дели со именителот на секоја алгебарска дропка за да се добие изразот со кој треба да се прошири именителот на секоја дропка.

$\frac{a}{2x^2y} = \frac{a \cdot 6}{2x^2y \cdot 6} = \frac{6a}{12x^2y}, x \neq 0, y \neq 0$

$\frac{b}{3y} = \frac{b \cdot 4x^2}{3y \cdot 4x^2} = \frac{4bx^2}{12x^2y}, x \neq 0, y \neq 0$

$\frac{c}{4xy} = \frac{c \cdot 3x}{4xy \cdot 3x} = \frac{3cx}{12x^2y}, x \neq 0, y \neq 0$

Ги множиме броителот и именителот на секоја алгебарска дропка со соодветниот израз.

Добиените алгебарски дропки имаат најмал заеднички именител.

ПРИМЕР 10

Сведи ги на еднаков именител дропките $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$ и $\frac{6x^2y}{3x^2y+6xy}$.

$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2} = \frac{x+3}{x-3}$

$\frac{6x^2y}{3x^2y+6xy} = \frac{6x^2y}{3xy(x+2)} = \frac{2x}{x+2}$

Прво ги скратуваме алгебарските дропки.

$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} = \frac{x+3}{x-3} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x-3)(x+2)}$

$\frac{6x^2y}{3x^2y+6xy} = \frac{2x}{x+2} = \frac{2x(x-3)}{(x+2)(x-3)}, x \neq 3, x \neq -2$

НЗС $(x-3, x+2) = (x-3) \cdot (x+2)$

ЗАДАЧА 1

Сведи ги на еднаков именител дропките:

а) $\frac{1}{a}$ и $\frac{2}{a+1}$ б) $\frac{2}{3x^2y^3}$ и $\frac{1}{5xy}$ в) $\frac{5}{2x-1}$ и $\frac{x}{4x^2-2x}$

ЗАДАЧА 2

Во едно шише има $\frac{5}{x-5}$ литри сок, а во друго $\frac{3}{y+4}$ литри сок. Доведи ги двете количества на сок на еднаков именител.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. За кои вредности на x, дропката нема смисла:

а) $\frac{x+2}{x}$ б) $\frac{x-3}{x-1}$ в) $\frac{1}{(x-2)(x-5)}$ г) $\frac{1}{x^2-4}$

2. Скрати ја дропката со помош на правилата за степенување:

а) $\frac{x^8y^3z}{x^3y^0z^4}$ б) $\frac{(x-4y)(x-3y)^2}{6x^2(x-4y)^7(x-3y)^5}$ в) $\frac{(x-y)^2(x+1)^9}{(x-y)(x+2)^3(x+1)^{12}}$

3. Скрати ја дропката:

а) $\frac{6ax}{8a^2}$ б) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ в) $\frac{x^4-x^3-x+1}{x^4+x^3-x-1}$ г) $\frac{3x^{n+2}}{x^ny}$

4. Скрати ја дропката:

а) $\frac{3a+6}{a^3+8}$ б) $\frac{2a(x-3y)}{6a^2(3y-x)}$ в) $\frac{x^2-y^2}{ax+ay}$ г) $\frac{3a+1}{9a^2-1}$

5. Скрати ја дропката и пресметај ја нејзината вредност:

а) $\frac{a-1}{2a-2a^2}$, за $a=-3$ б) $\frac{x^2-4}{x+2}$, за $x=3{,}5$ в) $\frac{x-1}{1-x}$, за $x=a$

6. Сведи ги алгебарските дропки на најмал заеднички именител:

а) $\frac{a}{2b}$ и $\frac{b}{c^2}$ б) $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{y}$ и $\frac{c}{z}$ в) $\frac{a^2}{2b^2}$, $\frac{2bc}{a^2}$ и $\frac{ab}{4c^2}$

7. Сведи ги алгебарските дропки на еднаков именител:

а) $\frac{2}{3a^2b^3}$, $\frac{5a}{6b^3c^2}$ и $\frac{1}{5abc}$ б) $\frac{x}{x+y}$ и $\frac{y}{x-y}$ в) $\frac{a}{x+y}$ и $\frac{b}{(x+y)^2}$

г) $\frac{2x}{x+y}$, $\frac{2y}{x-y}$ и $\frac{xy}{x^2-y^2}$ д) $\frac{2a}{a^3-ax^2}$, $\frac{3x}{x+a}$ и $\frac{5a}{x^2+2ax+a^2}$ ѓ) $\frac{5}{2x-1}$ и $\frac{x}{4x^2-2x}$

8. Во фабрика има $36x^2y^3$ автомобилски делови што треба да се спакуваат во кутии по $6xy$ парчиња. Колку кутии ќе се спакуваат?

9. Во мало шише во лабораторија има раствор од $\frac{8}{5-x}$ ml. Ако количеството треба се искаже со именител $10x(5-x)$, со кој израз треба да се прошири алгебарската дропка?

2.14. Операции со алгебарски дропки

Собирање и одземање на алгебарски дропки

АКТИВНОСТ

Пресметај:

а) $\frac{8}{15}+\frac{4}{15}$ и $\frac{8}{15}-\frac{4}{15}$ б) $\frac{2}{9}+\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{7}-\frac{2}{5}$

Објасни ги правилата според кои ги изврши собирањето и одземањето.

Правилата за собирање и одземање на алгебарските дропки се исти како и правилата за собирање и одземање на обичните дропки.

ПРИМЕР 1

Најди го збирот на алгебарските дропки $\frac{3x}{2y^2}$ и $\frac{5}{2y^2}$.

$\frac{3x}{2y^2}+\frac{5}{2y^2}=\frac{3x+5}{2y^2}, y\neq 0$

Алгебарските дропки имаат еднакви именители.

Броителот на збирот е збир од броителите на алгебарските дропки.

Именителот на збирот е еднаков на именителот на алгебарските дропки.

Алгебарски дропки со еднакви именители се собираат така што се собираат нивните броители, па добиениот збир се дели со заедничкиот именител:

$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}, C\neq 0.$

ПРИМЕР 2

Најди го збирот на алгебарските дропки $\frac{2a}{x-1}, \frac{3a-1}{x-1}$ и $\frac{2-ab}{x-1}$.

$\frac{2a}{x-1}+\frac{3a-1}{x-1}+\frac{2-ab}{x-1}=\frac{2a+3a-1+2-ab}{x-1}=\frac{5a+1-ab}{x-1}, x\neq 1$

ЗАДАЧА 1

Најди го збирот $\frac{3a}{2a^2x}+\frac{5ab}{2a^2x}+\frac{a-2b}{2a^2x}$.

ПРИМЕР 3

Најди ја разликата на алгебарската дропка $\frac{a}{c}$ со алгебарската дропка $\frac{a+3}{c}$.

$\frac{a}{c}-\frac{a+3}{c}=\frac{a-(a+3)}{c}$

$=\frac{a-a-3}{c}=\frac{-3}{c}, c\neq 0$

Алгебарските дропки имаат еднакви именители.

Броителот на разликата е разлика на броителите на дропката намаленик со дропката намалител.

Именителот на разликата е еднаков на именителот на дропките.

Алгебарските дропки со еднакви именители се одземаат така што од броителот на намаленикот се одзема броителот на намалителот, па добиената разлика се дели со нивниот заеднички именител:

$\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}, C\neq 0$

ПРИМЕР 4

Најди ја разликата $\frac{6a-1}{a+1}-\frac{2a-b}{a+1}$.

$\frac{6a-1}{a+1}-\frac{2a-b}{a+1}=\frac{6a-1-(2a-b)}{a+1}=\frac{6a-1-2a+b}{a+1}=\frac{4a+b-1}{a+1}, a\neq -1$

ЗАДАЧА 2

Најди ја разликата $\frac{2a-3b}{a^2b} - \frac{4a-5}{a^2b}$.

Ако алгебарските дропки имаат различни именители, тогаш тие претходно треба да се доведат на еднаков именител, а потоа се собираат или се одземаат како дропки со еднакви именители:

$$\frac{A}{M} \pm \frac{B}{N} = \frac{A \cdot N}{M \cdot N} \pm \frac{B \cdot M}{M \cdot N}, M, N \neq 0$$

ПРИМЕР 5

Изврши ги назначените операции:

а) $\frac{5b}{2a^2} + \frac{3}{4ab} + \frac{2b}{a}$ б) $\frac{2}{c-x} + \frac{3}{x-c} - \frac{1}{x}$ в) $a + \frac{ax}{a-x}$ г) $\frac{b^2}{2a+b} + 2a - b$

а) $\frac{5b}{2a^2} + \frac{3}{4ab} + \frac{2b}{a} = \frac{5b \cdot 2b + 3 \cdot a + 2b \cdot 4ab}{4a^2b} = \frac{10b^2 + 3a + 8ab^2}{4a^2b}, a \neq 0, b \neq 0$

б) $\frac{2}{c-x} + \frac{3}{x-c} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x-c} + \frac{3}{x-c} - \frac{1}{x} = \frac{-2x + 3x - (x-c)}{x(x-c)} = \frac{c}{x(x-c)}, x \neq 0, x \neq c$

в) $a + \frac{ax}{a-x} = \frac{a}{1} + \frac{ax}{a-x} = \frac{a(a-x) + ax}{a-x} = \frac{a^2}{a-x}, a \neq x$

г) $\frac{b^2}{2a+b} + 2a - b = \frac{b^2}{2a+b} + \frac{2a-b}{1} = \frac{b^2 + (2a-b)(2a+b)}{2a+b} = \frac{4a^2}{2a+b}, b \neq -2a$

ЗАДАЧА 3

Електричарот пресекол две парчиња жица, едното со должина $\frac{3}{7xy^2}$ метри, а другото со должина $\frac{5}{2x^2y}$ метри.

Колку вкупно жица пресекол електричарот? Запиши го одговорот во вид на алгебарска дропка.

Множење и делење на алгебарски дропки

АКТИВНОСТ

Пресметај: а) $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5}$ б) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ в) $\frac{5}{6} : \frac{3}{4}$

Објасни ги правилата според кои ги изврши назначените операции.

За множење, степенување и делење на алгебарските дропки важат истите правила како и за обичните дропки.

ПРИМЕР 6

Најди го производот на алгебарските дропки $\frac{9x}{2y^2}$ и $\frac{3x}{z}$.

$$\frac{9x}{2y^2} \cdot \frac{y}{3x^2} = \frac{9x \cdot y}{2x^2 \cdot 3y^2} = \frac{3xy}{2x^2y^2} = \frac{3}{2xy}$$

Броителот е производ од броителите на алгебарските дропки.

Именителот е производ на именителите на алгебарските дропки.

Алгебарските дропки се множат така што одделно се множат нивните броители и именители, па производот на броителите е броител, а производот на именителите е именител на производот:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}, B\neq 0, D\neq 0.$$

ПРИМЕР 7

Помножи ги алгебарските дропки $\frac{5a^2x}{3by^3}$ и $-\frac{9b^2y}{10ax^2}$.

$$\frac{5a^2x}{3by^3}\cdot\left(-\frac{9b^2y}{10ax^2}\right)=-\frac{5a^2x\cdot 9b^2y}{3by^3\cdot 10ax^2}=-\frac{3ab}{2xy^2},\ abxy\neq 0$$

ПРИМЕР 8

Правоаголен триаголник има катети со должина $\frac{5}{x^2-4}$ cm и $\frac{x-2}{x+2}$ cm. Колкава е плоштината P на триаголникот?

$$P=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{x^2-4}\cdot\frac{x-2}{x+2}\right)=\frac{5(x-2)}{2(x^2-4)(x+2)}=\frac{5}{2(x+2)^2}\ \text{cm}^2$$

Плоштината на триаголникот е $\frac{5}{2(x+2)^2}$ cm².

При множењето на алгебарските дропки треба да се види дали може да се изврши скратување. За таа цел, броителите и именителите, (ако се полиноми) ги разложуваме на множители, а скратувањето го вршиме пред множењето на броителите и именителите, како што е покажано погоре.

ЗАДАЧА 4

Најди го производот на алгебарските дропки $\frac{x-1}{2y}$ и $\frac{4y^2}{1-2x+x^2}$.

Алгебарска дропка се степенува така што нејзиниот броител и именител одделно се степенуваат со истиот степенов показател:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}, B\neq 0, n\in\mathbb{Z}.$$

ПРИМЕР 9

Изврши го степенувањето $\left(\frac{2a^2x}{3b}\right)^3$.

$$\left(\frac{2a^2x}{3b}\right)^3=\frac{(2a^2x)^3}{(3b)^3}=\frac{8a^6x^3}{27b^3}, b\neq 0$$

ЗАДАЧА 5

Најди го четвртиот степен на алгебарската дропка $\frac{bc}{a^2+a}$.

Алгебарските дропки се делат така што дропката – деленик се множи со реципрочната вредност на дропката – делител:

$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0.$

ПРИМЕР 10

Најди го количникот: а) $-\frac{28a}{5b^3} : \frac{14a^2}{15b^4}$ б) $\frac{a^2-b^2+2a+1}{3x^2} : (a-b+1)$

а) $-\frac{28a}{5b^3} : \frac{14a^2}{15b^4} = -\frac{28a}{5b^3} \cdot \frac{15b^4}{14a^2} = -\frac{28a \cdot 15b^4}{5b^3 \cdot 14a^2} = -\frac{6b}{a}, a \neq 0, b \neq 0$

б) $\frac{a^2-b^2+2a+1}{3x^2} : (a-b+1) = \frac{(a+1)^2-b^2}{3x^2} : \frac{a-b+1}{1} = \frac{(a+1-b)(a+1+b)}{3x^2} \cdot \frac{1}{a-b+1}$

$= \frac{a+b+1}{3x^2}, a-b+1 \neq 0, x \neq 0$

ЗАДАЧА 6

Подели ја алгебарската дропка $\frac{x}{x^2-16}$ со алгебарската дропка $\frac{x^3+4x^2}{x-4}$.

ПРИМЕР 11

Правоаголна парцела има површина од $\frac{12}{x}$ квадратни метри. Ако ширината е $\frac{3}{y}$ метри, колку е должината на парцелата?

$\frac{12}{x} : \frac{3}{y} = \frac{12}{x} \cdot \frac{y}{3} = \frac{4y}{x}$ метри Должината на парцелата е $\frac{4y}{x}$ метри.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

Изврши ги назначените операции со алгебарските дропки:

1. а) $\frac{a+2}{b} + \frac{2a-5}{b}$ б) $\frac{2a+1}{a} + \frac{3x-1}{a} - \frac{x-2}{a}$ в) $\frac{2x+1}{(y-2)^2} + \frac{3x-1}{(y-2)^2} - \frac{x-2}{(y-2)^2}$
2. а) $\frac{3}{x+1} - \frac{5}{2x+1}$ б) $\frac{1}{x^2-4x+4} + \frac{5}{x^2-4}$ в) $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}$
3. а) $\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{x+1}$ б) $\frac{5}{2a+4} - \frac{4}{a^2-4} + \frac{1}{a-2}$ в) $\frac{xy-1}{xy+1} - \frac{xy+1}{1-xy} + \frac{4}{1-x^2y^2}$
4. а) $\frac{3}{x-c} + \frac{2}{c-x} - \frac{1}{x}$ б) $\frac{3a+1}{2a+6} - \frac{a-1}{a+3}$ в) $\frac{1}{x-3} - \frac{x+1}{x^2-9} + \frac{2}{x^2+6x+9}$
5. а) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{2a}{a-b}$ б) $\frac{x+1}{y} \cdot \frac{4y^2}{x^2-1}$ в) $\frac{x-2}{6x+2y-2z} \cdot \frac{3x+y-z}{2x-x^2}$
6. а) $\frac{x-1}{2y} : \frac{(1-x)^2}{4y^2}$ б) $\frac{x^2}{(a-2)} : \frac{x^2}{(2-a)^2}$ в) $\frac{x^2-xy}{a^2+a} : \frac{2x-2y}{3a+3}$
7. Најди го периметарот на четириаголник со страни $\frac{2}{x-5}$, $\frac{6x}{x+3}$, $\frac{1}{7x-2}$ и $\frac{x^2}{x^2+3}$.

8. Најди ја плоштината на трапез со висина $\frac{x-2}{x^2+4}$ и основи $\frac{2}{x^2+5}$, $\frac{x^2}{x+3}$.

9. Ако дневната потреба е $\frac{x^2}{x^2+3}$ протеини, а ти внесуваш $\frac{x^2}{x^2+1}$ протеини, колкав дел од дневната потреба внесуваш?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Пресметај ја вредноста на изразот и направи проверка со калкулатор:
   а) $a^2+2\sqrt[3]{a}-4^2+a-\sqrt{a}$ за $a=64$ б) $x^2-\sqrt[3]{x^2}+5x\sqrt{x}-7$ за $x=81$

2. Без употреба на калкулатор пресметај:
   а) $\left(\frac{1}{7}\right)^0+\left(\frac{1}{13}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{11}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ б) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)^{-2}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)^{-2}$
   в) $9^{\frac{1}{2}}-64^{\frac{5}{6}}+125^{\frac{2}{3}}$
   Решението запиши го во вид на дропка.

3. Изврши ги назначените операции со степени со цели показатели:
   а) $\frac{3^{-1}xy^{-2}}{2^{-2}(x^2+y^2)^{-1}}$ б) $\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^{-1}$ в) $\left(\frac{a^{-3}\cdot a^7}{a^{-5}}:\frac{a^{-2}}{a^9}\right)^{-4}$

4. Изврши ги назначените операции со степени со рационални показатели:
   а) $a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{4}}:ab^{-\frac{1}{2}}$ б) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^{-12}$ в) $\frac{2a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^7}{a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}}-\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}}$

5. Еден авион летал од Европа до Австралија. Аеродромите се оддалечени $9{,}39\cdot10^3$ km еден од друг. Летот трае $7{,}26\cdot10^3$ минути.
   Просечна брзина = вкупно растојание : потребно време
   Која била просечната брзина на авионот изразена во километри на минута?

6. Сатурн нема кружна орбита околу Сонцето, но има максимално и минимално растојание од него. Минималното растојание на Сатурн од Сонцето изнесува $4{,}6\cdot10^7$ km, а максималното растојание изнесува $6{,}98\cdot10^7$ km.
   Колкава е разликата во километри помеѓу овие две растојанија? Запиши го решението во стандардна форма.

7. Најди го множеството допуштени вредности на променливите во изразот:
   а) $\frac{x+5x+3}{x^2+1}$ б) $\frac{a^2-16}{(a+4)\cdot(a-4)}$ в) $\frac{2a-2b}{2}$

8. Упрости ги полиномите.
   а) $7a^3-8{,}2b+0{,}5b-0{,}3a^3-a^3b^3$ б) $7xyz-4x^2z^2-7xz^2+6xz^2-xyz+4x^2z^2$

9. Ослободи се од заградите и упрости го изразот:
   а) $(2x-y+x)-(x+y-5z)$ б) $a^2-2ab-b^2-[4a^2+6ab-(-2ab+7b^2)]$
   в) $-[(a-5b^2+c^3)-7(a+b^2-5c^3)]$ г) $7x^2y-(5x^2y-9xyz-3x^2z)-2x^2y-[8xyz-(6xyz-4x^2z)]$

10. Градежна компанија го пресметува вкупниот материјален трошок за два проекта користејќи полиноми. Цената за првиот проект е $4x^2 + 3x + 5$ евра. Цената за вториот проект е $2x^2 - x + 7$ евра, каде што x е бројот на работни денови.

а) Најди ги вкупните трошоци за двата проекта заедно.

б) Најди ја разликата во трошоците помеѓу двата проекта.

11. Изврши ги назначените операции и упрости ги изразите:

а) $4x^2y^3 - 6x + 5) \cdot (-4x)$ б) $(x^3 - 6x + 5) \cdot (-4x)$

в) $(3x + 4y) \cdot (x^2 + 5y^2)$ г) $(5x - 3y) \cdot (4x + 7) - (2x - y) \cdot (3x + 8y)$

д) $(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$ ѓ) $(2x^3 - 4x^2 + 5) : (x^2 + 6)$

12. Пејзажен дизајнер уредува правоаголна градина каде што должината е $x^2 + 5x + 6$ метри, а ширината е $x + 2$ метри. Најди го полиномот за плоштината на градината.

13. Изврши ги назначените операции и упрости ги изразите:

а) $(x + y)^2 - (x - y)^2 + (x - y) \cdot (x + y)$ б) $(a + 1)^2 + 3(a - 1)^2 - 5(a + 1) \cdot (a - 1)$

14. Пресметај на најбрз начин:

а) 401^2 б) 1002^2 в) 99^2 г) $57 \cdot 63$ д) $72^2 - 68^2$ ѓ) $1{,}01 \cdot 0{,}99$

15. Во една овошна градина имало a реда по b овошни дрвја во секој ред. Колку дрвја имало повеќе во друга градина, во која имало 15 реда повеќе, но по 3 дрвја помалку во секој ред, отколку во првата градина. Пресметај го бројот на дрвја за $a = 30$ и $b = 38$.

16. Разложи го на прости множители изразот:

а) $12ax - 6bx + 2ay - by$ б) $x^4 - 10x^2y + 25y^2$ в) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$

г) $a^3 + 3a^2 + 3a + 9$ д) $x^3 - 3x^2 + x + ax^2 - 3ax + a$ ѓ) $x^3 + y^3 + (x + y)^2 + x^2 - y^2$

17. Најди НЗС на полиномите:

а) $x^2y + xy^2$ и $x^2 - y^2$ б) $5x - 5$, $3x + 3$ и $2x^2 - 2$ в) $x^3 - 2x^2y$ и $x^2 - 4xy + 4y^2$

18. Најди НЗД на полиномите: а) $6x^2y^4$ и $9x^5y$ б) $x^2 + 4x + 4$ и $x^2 - 4$ в) $a^3 + 8$, $a^2 - 4$ и $a^2 + 2a$

19. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\dfrac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{ab}$, за $ab = 2$ б) $\dfrac{(a+b)^3 - a^3 - b^3}{a+b}$, за $ab = 5$

20. Изврши ги назначените операции:

а) $\dfrac{(x+1)^2}{x} - \dfrac{(x-1)^2}{x}$ б) $\dfrac{1}{x-c} - \dfrac{1}{x+c} + \dfrac{1-2c}{x^2-c^2}$ в) $\dfrac{x^2-25}{x^2-9} \cdot \dfrac{x^2-3x}{x^2+3x}$

21. Упрости го изразот:

а) $\dfrac{x}{2x^3 - 2x^2y} + \dfrac{4y}{x^2y + xy^2} - \dfrac{1}{x^2 - y^2}$ б) $\dfrac{2x^2 + 8xy + 8y^2}{xy + y} \cdot \dfrac{(x+1)}{3x^2 - 12y^2}$

в) $\dfrac{x^2 - y^2 + 2x + 1}{x(x - y + 1)} : (x - y + 1)$ г) $\left(\dfrac{x^2+1}{2x} - 1\right) : \left(\dfrac{x^2+1}{2x} + 1\right)$

22. Инженер дизајнира греда што треба да издржи два различни товари, распределени по нејзината должина. Распределбата на вкупното оптоварувањето е дадена со

$$\frac{3x}{x^2 - 9} + \frac{2}{x - 3x}$$

Упрости го изразот и објасни зошто упростениот израз помага во инженерските пресметки.

Тема 3:

ФУНКЦИЈА, РАВЕНКА, СИСТЕМ ОД ДВЕ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКА

Во изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш:

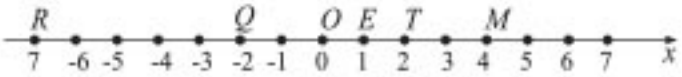
1. да пресметуваш периметар и плоштина на многуаголници чии темиња се дадени со координати;
2. да ја препознаваш линеарната зависност во проблемски ситуации, да ја запишуваш како функција, да го црташ графикот, да анализираш и да донесуваш заклучоци;
3. да решаваш проблемски ситуации кои се сведуваат на равенка, систем од линеарни равенки со две непознати и неравенка.

3.1. Координати на точка и растојание меѓу две точки во Декартов правоаголен координатен систем

Координати на точка

АКТИВНОСТ

а) Запиши ги координатите на точките M, T, E, O, Q и R, означени на бројната оска на цртеж 1.

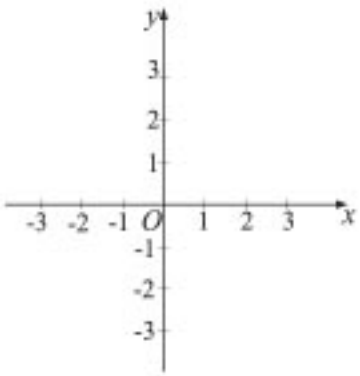


Цртеж 1

Нацртај бројна оска и означи ги точките $A(+2)$ и $B(-2)$.

Какви се растојанијата на точките $A(+2)$ и $B(-2)$ од координатниот почеток O?

Декартов правоаголен координатен систем се состои од две заемно нормални бројни оски, наречени **координатни оски** (цртеж 2).



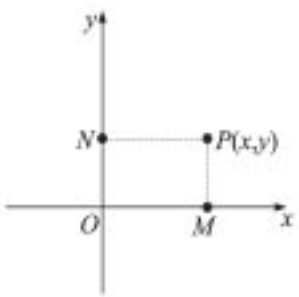
Цртеж 2

Хоризонталната координатна оска се вика **x-оска** или **апсцисна оска**.
Вертикалната координатна оска се вика **y-оска** или **ординатна оска**.
Точката во која се сечат двете координатни оски се вика **координатен почеток** и се означува со O.

Позитивна насока на апсцисната оска се зема насоката надесно од координатниот почеток.

Позитивна насока на ординатната оска се зема насоката нагоре од координатниот почеток.
Рамнина во која е определен координатен систем се вика **координатна рамнина**.

P е точка во координатната рамнина (цртеж 3).
Точката M е подножјето на нормалата спуштена од точката P кон x-оската.
Точката N е подножјето на нормалата спуштена од точката P кон y-оската.
На точката M одговара единствен реален број x на x-оската.
На точката N одговара единствен реален број y на y-оската.
Положбата на точката P е наполно определена со подредениот пар (x, y) од реални броеви, наречени **координати** на точката P.
Бројот x се вика **прва координата** или **апсциса** на точката P.
Бројот y се вика **втора координата** или **ордината** на точката P.
Запишуваме $P(x, y)$.



Цртеж 3

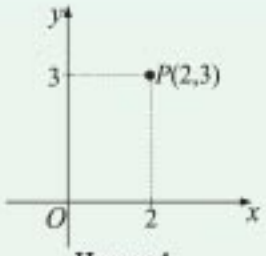
ПРИМЕР 1

Нацртај ја во координатната рамнина точката $P(2, 3)$.

Цртаме нормала на x-оската низ точката со координата 2.

Цртаме нормала на y-оската низ точката со координата 3.

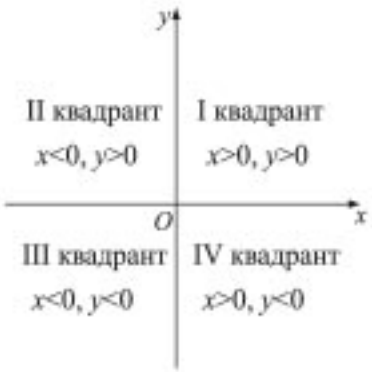
Точката P е пресечната точка на двете нормали (цртеж 4).



Цртеж 4

Координатните оски ја разделуваат координатната рамнина на четири дела наречени **квадранти** (цртеж 5).

I квадрант е делот горе десно
II квадрант е делот горе лево
III квадрант е делот долу лево
IV квадрант е делот долу десно
Точка $P(x, y)$ се наоѓа во:
I квадрант, ако $x > 0$ и $y > 0$
II квадрант, ако $x < 0$ и $y > 0$
III квадрант, ако $x < 0$ и $y < 0$
IV квадрант, ако $x > 0$ и $y < 0$



Цртеж 5

ПРИМЕР 2

Нацртај ја во координатната рамнина точката:

а) $A(5, 2)$ б) $B(4, 0)$ в) $C(-3, 5)$ г) $D(0, 3)$

д) $E(-6, -1)$ ѓ) $F(-2, 0)$ е) $G\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ ж) $H(0, -4)$

и определи во кој квадрант или на која оска се наоѓаат.

а) $A(5, 2)$ се наоѓа во првиот квадрант

б) $B(4, 0)$ се наоѓа на x-оската

в) $C(-3, 5)$ се наоѓа во вториот квадрант

г) $D(0, 3)$ се наоѓа на y-оската

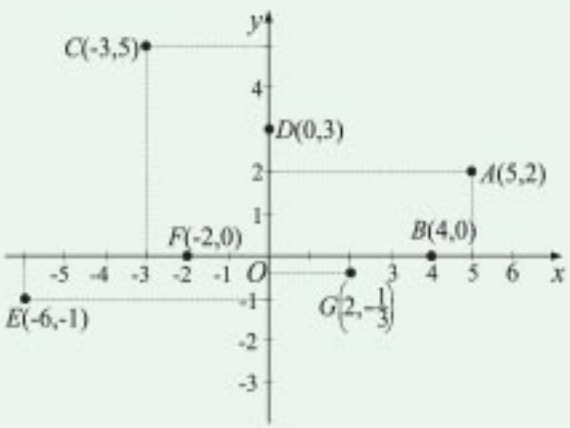
д) $E(-6, -1)$ се наоѓа во третиот квадрант

ѓ) $F(-2, 0)$ се наоѓа на x-оската

е) $G\left(2, -\frac{1}{3}\right)$ се наоѓа во четвртиот квадрант

ж) $H(0, -4)$ се наоѓа на y-оската

Точките се прикажани на цртеж 6.



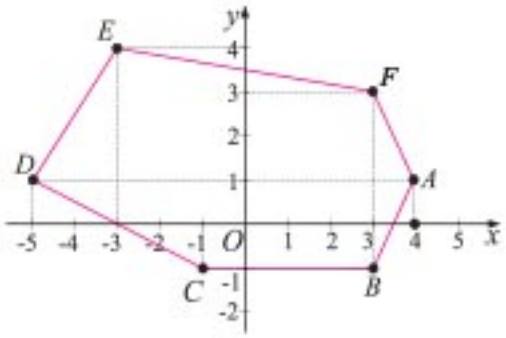
Цртеж 6

ЗАДАЧА 1

Запиши ги координатите на темињата на шестаголникот $ABCDEF$ (цртеж 7).

ЗАДАЧА 2

Нацртај ги во координатната рамнина точките: $A(-4, 3)$, $B(2, 3)$ и $C(2, -3)$.
Потоа, нацртај точка D така што $ABCD$ да биде квадрат.
Запиши ги координатите на точката D.



Цртеж 7

Растојание меѓу две точки

АКТИВНОСТ

Пресметај го растојанието меѓу точките на бројната оска:
а) $A(+2)$ и $B(+4)$ б) $M(-4)$ и $N(+7)$ в) $P(-3)$ и $Q(-5)$ г) $S(-6)$ и $T(+4)$
Потоа, провери ја точноста на формулата за пресметување на растојанието d меѓу точките $E(x_1)$ и $F(x_2)$ на бројната оска: $d = |x_1 - x_2|$ што значи $d = x_1 - x_2$, кога $x_1 \geq x_2$ и $d = x_2 - x_1$, кога $x_2 \geq x_1$.

Употребата на координатниот систем ни овозможува да го пресметаме растојанието меѓу две точки во координатната рамнина.

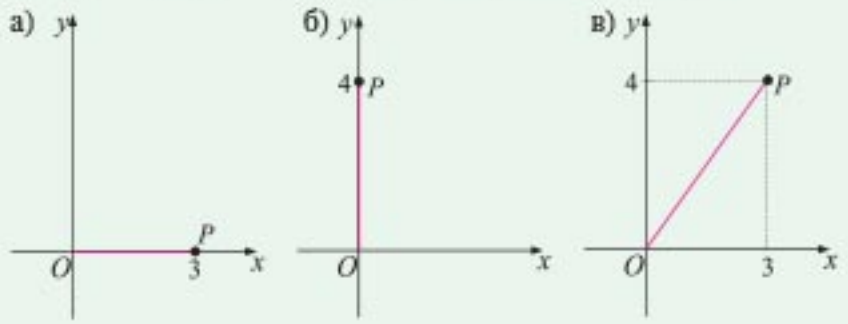
ПРИМЕР 3

Честичка се движи праволиниски од почетната точка $O(0, 0)$ кон крајната точка P:
а) $P(3, 0)$ б) $P(0, 4)$ в) $P(3, 4)$.
Колку единици ќе се помести по x – оската, а колку единици по y-оската? Колкаво е растојанието d од почетната до крајната точка на траекторијата?

а) Честичката ќе се помести 3 единици по x-оската и 0 единици по y-оската. Растојанието од почетната до крајната точка е исто така 3 единици (цртеж 8 а)).

б) Поместувањето на честичката ќе биде 0 единици по x – оската и 4 единици по y-оската. Растојанието од почетната до крајната точка е исто така 4 единици (цртеж 8 б)).

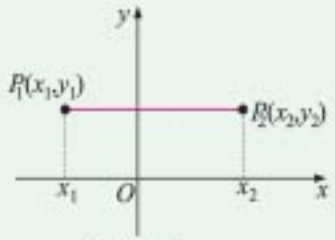
в) Честичката ќе се помести 3 единици по x-оската и 4 единици по y-оската (цртеж 8 в)). Растојанието од почетната до крајната точка, пресметано со Питагоровата теорема, ќе биде:
$d = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ единици.



Цртеж 8

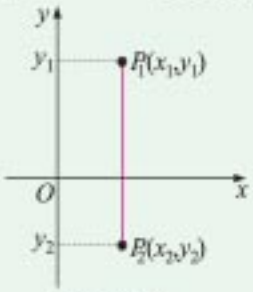
Да го определиме растојанието d меѓу точките $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ во координатната рамнина.

Ако P_1 и P_2 лежат на права паралелна со x-оската, тогаш $d = |x_1 - x_2|$ (цртеж 9).



Цртеж 9

Ако P_1 и P_2 лежат на права паралелна со y-оската, тогаш $d = |y_1 - y_2|$ (цртеж 10).



Цртеж 10

Нека P_1 и P_2 не лежат на права паралелна со x-оската, ниту на права паралелна со y-оската (цртеж 11).

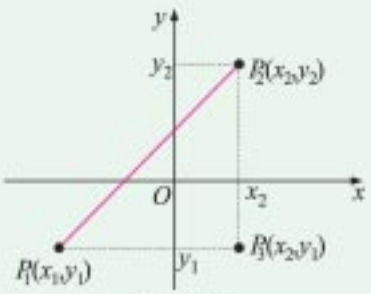
Избираме точка $P_3(x_2, y_1)$.

Триаголникот $P_1P_2P_3$ е правоаголен триаголник.

Заради Питагоровата теорема на триаголникот $P_1P_2P_3$ добиваме $d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$.

Заради $x_2 - x_1 \geq 0$ и $y_2 - y_1 \geq 0$ следува дека $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Коренуваме на двете страни: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



Цртеж 11

ПРИМЕР 4

Растојанието меѓу точките $P_1(2, -4)$ и $P_2(-2, -1)$ во координатната рамнина изнесува:

$d = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-(-4))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Со пресметување на растојанието меѓу точките $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ во координатната рамнина, всушност ја пресметуваме должината на отсечката P_1P_2: $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

ЗАДАЧА 3

Пресметај ги должините на страните на триаголникот ABC, ако $A(-1, 3)$, $B(2, 6)$ и $C(3, 2)$.

ЗАДАЧА 4

Честичка се движи од точка $A(2, 1)$ до точка $B(6, 4)$, а потоа до точка $C(9, 8)$. Колкаво е вкупното растојание што го поминала честичката?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

Нацртај координатен систем со оски означени од −6 до 6.

1. Нацртај ги точките:
   а) $A(2, 1)$, $B(2, 5)$, $C(6, 5)$ и $D(6, 1)$, а потоа именувај ја геометриската форма $ABCD$.
   б) $E(-4, 0)$, $F(-2, 4)$, $G(0, 0)$, а потоа, именувај ја геометриската форма EFG.
   в) $J(-3, -1)$, $K(-3, -3)$, $L(3, -4)$, $M(3, 3)$, а потоа, именувај ја геометриската форма $JKLM$.

2. Нацртај ги точките: $E(2, 4)$, $F(1, -1)$ и $G(-2, -1)$. Нацртај точка H така што $EFGH$ да биде паралелограм. Запиши ги координатите на точката H.

3. Ана, Блерим и Кате се обидуваат да го најдат третото теме, R, на рамнокракиот триаголник PQR. Познато им е дека $P(1, 0)$ и $Q(3, 0)$. Ана запишала $R(3, 6)$, Блерим $R(2, -1)$, а Кате $R(2, 5)$. Кој од нив точно ја запишал точката R?

4. Нацртај ги точките $S(-2, 4)$, $T(-4, 1)$ и $U(-2, -2)$. Потоа, нацртај ја точката $V(5, a)$ така што $STUV$ е делтоид. Колку е вредноста на втората координата a?

5. Нацртај ги точките $A(0, 3)$ и $B(0, -1)$.
   а) Нацртај ги темињата C и D на квадратот $ABCD$, а потоа запиши ги нивните координати. Можни се две решенија.
   б) Нацртај ги темињата P и Q на квадратот $APBQ$ со дијагонала AB, а потоа запиши ги нивните координати.

6. Која точка се наоѓа подалеку од координатниот почеток, $A(4, 2)$ или $B(-3, -4)$?

7. Која од точките $A(5, 6)$ или $B(5, 3)$ е поблиску до точката $C(-3, 2)$?

8. Двете крајни точки на челична греда се во координатите (–4,2) и (2,–2). Колку е долга гредата?

9. Пресметај ги должините на страните на триаголникот ABC, ако:
   а) $A(-1, 3)$, $B(2, 6)$ и $C(3, 2)$ б) $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$ и $C(-3, -2)$
   Потоа пресметај го периметарот на триаголникот ABC.

10. Триаголникот ABC има темиња а) $A(5, -3)$, $B(2, 4)$ и $C(3, 2)$ б) $A(3, 1)$, $B(4, 3)$ и $C(6, 2)$
    Утврди дали триаголникот е рамнокрак, а потоа пресметај го неговиот периметар.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Во координатната рамнина избери произволна точка $M(x, y)$. Потоа, откриј ги координатите на точката N, ако

а) точката N е слика на точката M при осна симетрија во однос на x – оската.

б) точката N е симетрична на точката M при осна симетрија во однос на y – оската.

в) точката N е слика на точката M при ротација околу координатниот почеток за агол од 180°.

3.2. Средишна точка на отсечка и плоштина на триаголник

Средишна точка на отсечка

АКТИВНОСТ

На бројната оска најди ја средишната точка на отсечката чии крајни точки се:

а) $A(+5)$ и $B(+3)$ б) $M(-2)$ и $N(+4)$ в) $P(-1)$ и $Q(-5)$ г) $S(-3)$ и $T(+6)$

Потоа, провери ја точноста на формулата за пресметување на координатата x_3 на средишната точка на отсечката со крајни точки кои имаат координати x_1 и x_2 на бројната оска: $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Употребата на координатниот систем ни овозможува да ги најдеме координатите на средишната точка на отсечка зададена со крајните точки.

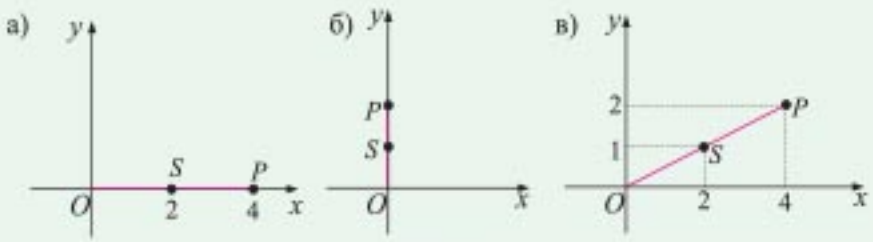
ПРИМЕР 1

Планинар се движи по права патека од почетната точка $O(0, 0)$ кон крајната точката:
а) $P(4, 0)$ б) $P(0, 2)$ в) $P(4, 2)$.
Најди ги координатите на средината S на патеката OP.

а) Планинарот се движи долж x-оската. Првата координата на средината на патеката е $\frac{4+0}{2} = 2$, додека втората координата е 0, односно $S(2, 0)$ (цртеж 1 а)).

б) Во овој случај планинарот се движи долж y-оската. Првата координата на средината на патеката е 0, додека втората координата е $\frac{0+2}{2} = 1$, односно $S(0, 1)$ (цртеж 1 б)).

в) Првата координата на средината на патеката е $\frac{4+0}{2} = 2$, додека втората координата е $\frac{0+2}{2} = 1$. Во овој случај $S(2, 1)$ (цртеж 1 в)).

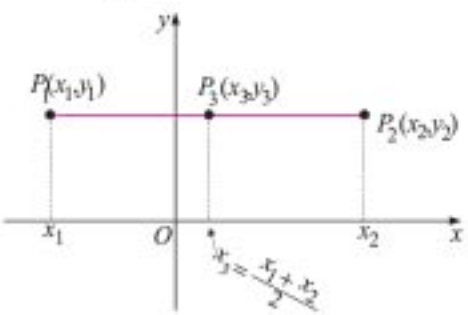


Цртеж 1

Нека $P_3(x_3, y_3)$ е средишна точка на отсечката со крајни точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$.

Ако P_1 и P_2 лежат на права паралелна со x-оската, тогаш (цртеж 2)

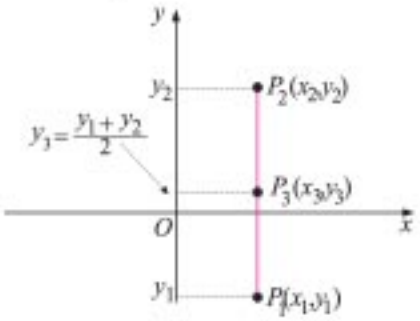
$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и $y_3 = y_2 = y_1$



Цртеж 2

Ако P_1 и P_2 лежат на права паралелна со y-оската, тогаш (цртеж 3)

$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ и $x_3 = x_2 = x_1$



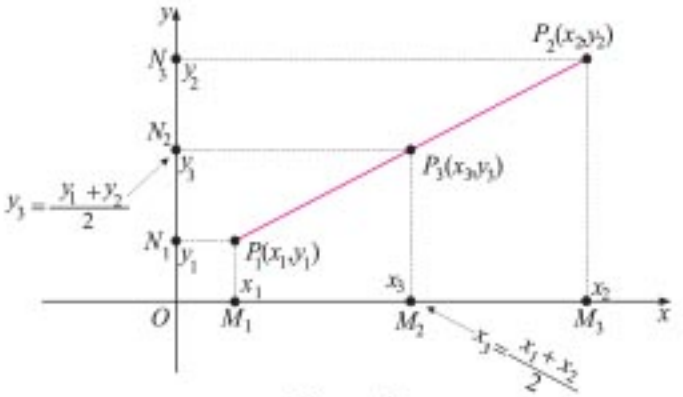
Цртеж 3

Нека P_1 и P_2 не лежат на права паралелна со x-оската, ниту на права паралелна со y-оската (цртеж 4).

Координатите на ортогоналните проекции M_1, M_2 и M_3, на x-оската, на точките P_1, P_2 и P_3, се x_1, x_2, и $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, соодветно.

Координатите на ортогоналните проекции N_1, N_2 и N_3, на y-оската, на точките P_1, P_2 и P_3, се y_1, y_2 и $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, соодветно.

Координатите на точките P_3 се $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ и $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.



Цртеж 4

ПРИМЕР 2

Најди ги координатите на средишната точка $P_3(x_3, y_3)$ на отсечката со крајни точки $P_1(4, -5)$ и $P_2(-6, -3)$.

$x_3 = \frac{4 + (-6)}{2} = -1$ и $y_3 = \frac{-5 + (-3)}{2} = -4$

ЗАДАЧА 1

Хомогена греда има краишта во точките $P(3, 7)$ и $R(11, -1)$. Каде се наоѓа тежиштето T на гредата?

Плоштина на триаголник

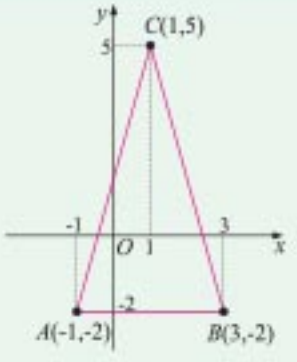
Плоштината P на триаголник ABC со темиња $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ се пресметува по формулата $P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ квадратни единици

ПРИМЕР 3

Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако $A(-1, -2)$, $B(3, -2)$ и $C(1, 5)$ (цртеж 5).

Според формулата за пресметување на плоштина на триаголник чии темиња се зададени со своите координати, пресметуваме дека:

$$P = \frac{1}{2}|(-1)(-2-5) + 3(5-(-2)) + 1(-2-(-2)| =$$
$$= \frac{1}{2}|(-1)(-7) + 3(5+2) + 1(-2+2)| =$$
$$= \frac{1}{2}|7 + 21 + 0| = 14 \text{ квадратни единици}$$



Цртеж 5

Плоштината на триаголник ABC со темиња $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ е еднаква на нула, ако и само ако неговите темиња се колинеарни. Според тоа, **условот за колинеарност** на три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ гласи:

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

ПРИМЕР 4

Провери дали точките $M(1, 2)$, $N(3, 6)$ и $P(5, 10)$ се колинеарни? $x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$

Според условот за колинеарност на три точки пресметуваме дека:
$1(6 - 10) + 3(10 - 2) + 5(2 - 6) = -4 + 24 - 20 = 0$

Дадените точки се колинеарни.

За да ја најдеме плоштината на кој било многуаголник, го разбиваме многуаголникот на триаголници, кои се дисјунктни и чија унија е еднаква на многуаголникот. Потоа ги пресметуваме плоштините на триаголниците. Плоштината на многуаголникот е еднаква на збирот од плоштините на сите триаголници.

ПРИМЕР 5

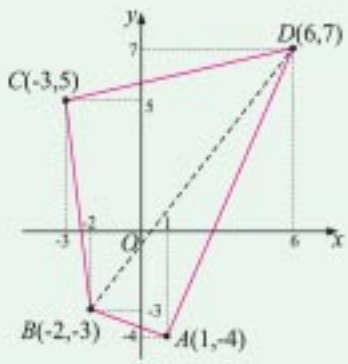
Најди ја плоштината на четириаголникот $ABCD$ чии темиња се $A(1, -4)$, $B(-2, -3)$, $C(-3, 5)$ и $D(6, 7)$ (цртеж 6).

Ја пресметуваме плоштината P_1 на триаголникот ABD:

$$P_1 = \frac{1}{2}|1(-3 - 7) + (-2)(7 - (-4)) + 6(-4 - (-3)| =$$
$$= \frac{1}{2}|1(-10) + (-2)(11) + 6(-1)| =$$
$$= \frac{1}{2}|-10 - 22 - 6| = 19 \text{ квадратни единици}$$

Ја пресметуваме плоштината P_2 на триаголникот BCD:

$$P_2 = \frac{1}{2}|(-2)(5 - 7) + (-3)(7 + 3) + 6(-3 - 5)| =$$
$$= \frac{1}{2}|(-2)(-2) + (-3) \cdot 10 + 6(-8)| =$$
$$= \frac{1}{2}|4 - 30 - 48| = 37 \text{ квадратни единици}$$



Цртеж 6

За да ја пресметаме плоштината P на четириаголникот $ABCD$ ги собираме плоштината P_1 на триаголникот ABD и плоштината P_2 на триаголникот BCD:

$P = P_1 + P_2 = 19 + 37 = 56$ квадратни единици.

Плоштината P на четириаголникот $ABCD$ е 56 квадратни единици.

ЗАДАЧА 2

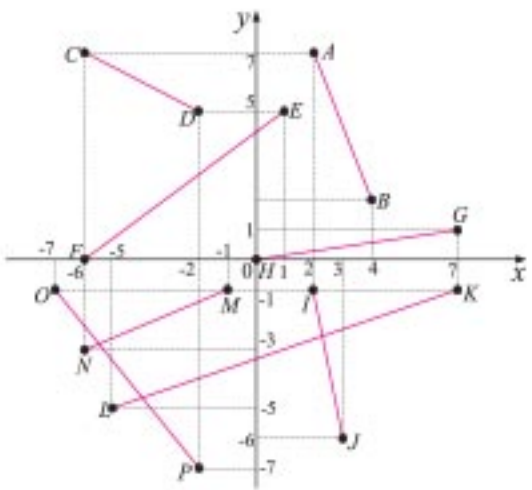
За која вредност на a плоштината на триаголникот ABC со темиња $A(a, 2a)$, $B(3, 11)$ и $C(8, 6)$ изнесува 5 квадратни единици?

ЗАДАЧА 3

Јужната страна на покривот на куќата на Дамјан е рамнокрак трапез $ABCD$, чии темиња имаат координати $A(-6, 0)$, $B(6, 0)$, $C(3, 4)$ и $D(-3, 4)$. Дамјан сака да постави соларни панели на целата површина на јужната страна на покривот. Ако од 1 квадратен метар соларни панели Дамјан може да произведе 300 ват-часови електрична енергија дневно, колку електрична енергија ќе произведе во текот на 90 сончеви дена?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Најди ги координатите на средишната точка S на отсечката AB, ако:
   а) $A(3, 6)$ и $B(9, 12)$ б) $A(-1, 2)$ и $B(3, 5)$ в) $A(-2, -4)$ и $B(-3, 7)$
2. Средишната точка на отсечката AB со крајни точки $A(10, a)$ и $B(4, 3)$ е $S(7, 5)$. Колку е вредноста на параметарот a?
3. Во правоаголникот $ABCD$ две спротивни темиња се $A(-2,-4)$ и $C(8,6)$. Кои се координатите на пресекот S на дијагоналите на правоаголникот?
4. Монтажна шина е поставена од точката $A(-6,5)$ до точката $B(6,5)$. Кои се координатите на средишната точката C во која треба да се постави носачот на шината?
5. Пресметај ја должината и најди ја средишната точка на секоја отсечка на цртеж 7.
6. Пресметај ја плоштината на паралелограмот $ABCD$, ако $A(0, 1)$, $B(3, 7)$, $C(4, 4)$ и $D(1, -2)$.
7. Пресметај ја плоштината на трапезот $ABCD$, ако $A(1, 4)$, $B(5, 3)$, $C(-3, -5)$ и $D(-2, 1)$.
8. Утврди дали точките $A(1, 2)$, $B(3, 6)$ и $C(5, 10)$ се колинеарни.
9. Точките $A(-2, -3)$ и $B(3, -1)$ и C(1, 4) се темиња на триаголникот ABC. Пресметај ја плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$, ако A_1, B_1 и C_1 се средишните точки на страните BC, AC и AB, соодветно.



Цртеж 7

10. Еден работник заварил метална плоча со темиња во $A(-2,-1)$, $B(4,3)$ и $C(1,6)$. Колкава е плоштината на плочката?

3.3. Линеарна функција

Дефиниционо множество и множество вредности на линеарна функција

ПРИМЕР 1

Еден воз тргнал од градот А. По поминати 4 километри почнал да се движи рамномерно со брзина 50 километри на час. На кое растојание од градот А ќе биде возот по 1, 2, 3, ... , x часа од тргнувањето?

По 1 час возот ќе биде оддалечен од градот А $(50 \cdot 1 + 4)$ километри, по 2 часа ќе биде оддалечен $(50 \cdot 2 + 4)$ километри, по x часа ќе биде оддалечен $(50 \cdot x + 4)$ километри.

Ако со y го означиме изминатиот пат, којшто е функција од времето x, тогаш може да запишеме дека по x часа возот ќе биде оддалечен од градот А за $y(x) = (50 \cdot x + 4)$ километри.

Функцијата y што го дава бројот на поминати километри во зависност од бројот на часови x е линеарната функција $y = 50x + 4$.



Функција од облик $y = ax + b$, каде што a и b се реални броеви, а x е **независна променлива** се нарекува **линеарна функција.**
Бројот a се нарекува **коефициент пред независната променлива** x, а бројот b се нарекува **слободен член на линеарната функција.**

Во општ случај, **дефиниционата област** D на линеарната функција $y = ax + b$ е множеството реални броеви $\mathbb{R}$, односно $D = \mathbb{R}$.

Слично, во општ случај, ако коефициентот пред променливата $a \neq 0$, тогаш **множеството вредности** V на линеарна функција е множеството реални броеви $\mathbb{R}$, односно $V = \mathbb{R}$.

Ако $a = 0$, тогаш линеарната функција се вика **константна функција.**
За константната функција $y = b$, множеството вредности $V = \{b\}$ е едноелементно множество.

Ако функцијата се разгледува во определени услови, дефиниционата област и множеството вредности може да бидат вистинско подмножество од множеството реални броеви $\mathbb{R}$. Во таа смисла, за дефиниционото множество и множеството вредности на линеарната функција од пример 1 имаме $D = V = [0, +\infty)$.

ПРИМЕР 2

а) Функцијата $y = -3x + 5$ е линеарна со коефициент $a = -3$ и слободен член $b = 5$.
За дефиниционото множество и множеството вредности имаме дека $D = V = \mathbb{R}$.
б) Функцијата $y = 3$ е константна функција, бидејќи коефициентот $a = 0$.
За дефиниционото множество и множеството вредности имаме дека $D = \mathbb{R}$ и $V = \{3\}$.

ЗАДАЧА 1

Во еден резервоар има 10 литри вода. Секоја минута во резервоарот дотекуваат по 5 литри вода.

а) Запиши ја линеарната функција што ја определува зависноста на количеството вода во резервоарот од времето за коешто се полни резервоарот.

б) Колку изнесува коефициентот пред независната променлива, а колку слободниот член на линеарната функција?

в) Определи ги дефиниционото множество и множеството вредности на функцијата.

ПРИМЕР 3

Најди ја вредноста на коефициентот a на линеарната функција $y = ax - 4$, ако $y(3) = 2$.

Треба да ја најдеме вредноста на коефициентот a, така што за вредност на променливата $x = 3$ функцијата добива вредност $y(3) = 2$. Тоа значи дека $a \cdot 3 - 4 = 2$ оттаму следува дека вредноста на коефициентот пред непознатата е $a = 2$.

График на линеарна функција и пресеци на графикот со координатните оски

ПРИМЕР 4

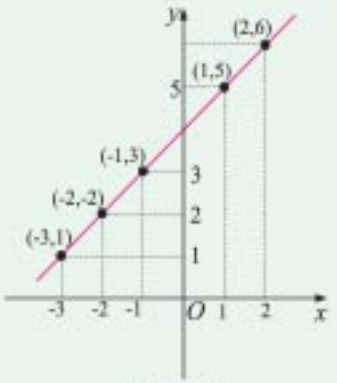
Во табелата се дадени неколку вредности на линеарната функција $y = x + 4$ соодветни на вредностите на променливата x.

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	1	2	3	4	5	6

Првата компонента на подредените парови $(-3, 1), (-2, 2), (-1, 3), (0,4), (1, 5)$ и $(2, 6)$ е вредноста на променливата x, а втората компонента е соодветната вредноста на функцијата y.

Овие подредени парови можеме да ги претставиме како точки во координатната рамнина, така што на x – оската да ја нанесеме првата координата, а на y – оската втората координата.

Со нивно поврзување добиваме права, која визуелно го прикажува графикот на дадената линеарна функција (цртеж 1).

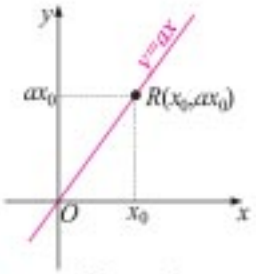


Цртеж 1

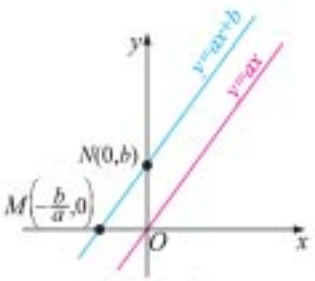
Графикот на линеарната функција $y = ax$ е права што минува низ координатниот почеток (цртеж 2).

За да го нацртаме графикот на линеарната функција $y = ax$, доволно е да нацртаме една точка $R(x_0, ax_0)$. Потоа, цртаме права која минува низ координатниот почеток и точката $R(x_0, ax_0)$.

Графикот на линеарната функција $y = ax + b$ е права што е паралелна на графикот на линеарната функција $y = ax$, ја сече апсцисната оска во точката $M\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ и ординатната оска во точката $N(0, b)$ (цртеж 3).



Цртеж 2



Цртеж 3

Во таа смисла, коефициент a пред независната променлива се нарекува **коефициент на правец** на линеарната функција, а слободниот член b се вика **отсечок на ординатната оска**. За да го нацртаме графикот на линеарната функција $y = ax + b$, доволно е да нацртаме две точки од графикот. Најчесто ги цртаме пресечните точки со координатните оски $M\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ и $N(0, b)$. Вредноста на променливата $x_0 = -\frac{b}{a}$ за која вредноста на линеарната функција е еднаква на нула се нарекува **нула на функцијата**.

ПРИМЕР 5

Нула на линеарната функција $y = 2x - 4$ е вредноста на променливата $x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$.

Пресекот на линеарната функција со x – оската е во точката $M(2, 0)$.
Пресекот на линеарната функција со y – оската е во точката $N(0, -4)$.

ПРИМЕР 6

Нацртај го графикот на линеарната функцијата: а) $y = 2x + 3$ б) $y = -x + 2$

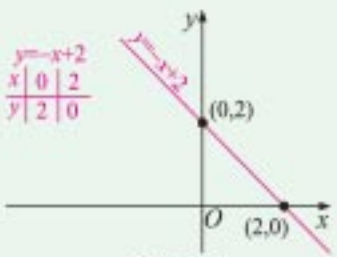
Ги наоѓаме пресечните точки од графикот со координатните оски, а потоа цртаме права низ тие две точки.

а)



Цртеж 4

б)



Цртеж 5

ЗАДАЧА 2

Автомобил забавува од брзина 25 метри во секунда со забрзување од – 1 m/s².

а) Нацртај го графикот на брзината на автомобилот, во зависност од времето, сè додека автомобилот не престане со движење.

б) Определи го времето по кое автомобилот ќе застане.

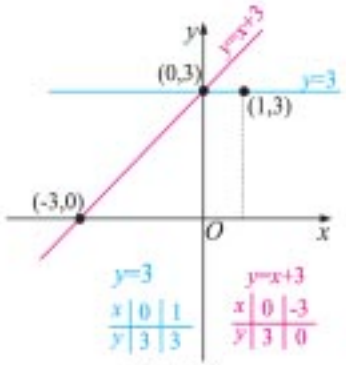
АКТИВНОСТ

а) Нацртај ги во ист координатен систем графиците на линеарните функции $y = 3$ и $y = x + 3$. Спореди ги отсечоците на ординатните оски, а потоа утврди ја заемната положба на двата графика. Што може да заклучиш?

б) Нацртај ги во ист координатен систем графиците на линеарните функции $y = 2x$ и $y = 2x - 2$ и спореди ги коефициентите на правците, а потоа утврди ја заемната положба на двата графици. Што може да заклучиш?

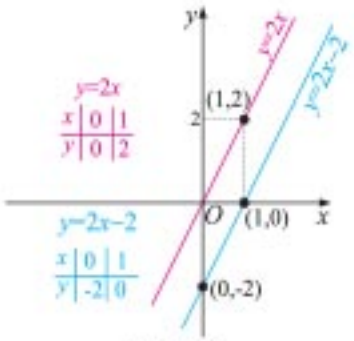
Ако добро нацрта, сигурно доби дека графиците на линеарните функции $y = 3$ и $y = x + 3$ се сечат во точката $N(0, 3)$ (цртеж 6), бидејќи линеарните функции имаат ист отсечок на ординатната оска, додека графиците на линеарните функции $y = 2x$ и $y = 2x - 2$ се паралелни, бидејќи линеарните функции имаат ист коефициент на правец (цртеж 7).

а)



Цртеж 6

б)



Цртеж 7



1. Графиците на линеарните функции $y = ax + b_1$ и $y = ax + b_2$, со ист коефициент на правец и различни отсечоци по ординатната оска, се паралелни прави.
2. Специјално, графикот на функцијата $y = ax + b$, за $a = 0$ е права паралелна со x – оската, што минува низ точката $N(0, b)$.
3. Графиците на линеарните функции $y = a_1x + b$ и $y = a_2x + b$, со ист отсечок на ординатната оска b и различни коефициенти на правци, се прави кои ја сечат ординатната оска во точката $N(0, b)$.

ПРИМЕР 7

Најди го коефициентот на правецот a, така што графикот на линеарната функција $y = ax + 6$ да биде права паралелна со графикот на линеарната функција $y = 3x + 4$.

Графиците на двете линеарни функции ќе бидат паралелни прави, ако коефициентите на правци им се еднакви, односно ако $a = 3$.

ПРИМЕР 8

Најди го отсечокот на ординатната оска b, така што графикот на линеарната функција $y = 6x - b$ да ја сече ординатната оска во истата точка во која ја сече и графикот на линеарната функција $y = -2x + 6$.

Графиците на двете линеарни функции ќе ја сечат ординатната оска во една иста точка, ако имаат еднакви отсечоци на ординатната оска, $b = -6$.

ЗАДАЧА 3

Миле сака да ги префрли сликите од екскурзија од телефонот на компјутер. Вкупната големина на сликите кои треба да се префрлат е 750 мегабајти. Откако префрлил 300 мегабајти слики забележал дека за да се префрлат останатите слики треба да чека уште 90 секунди.

а) Определи ја средната брзина на префрлање на податоците.

б) Нацртај график на кој се гледа како зависи големината на префрлените слики во зависност од времето на префрлање на сликите.

Монотоност на линеарна функција

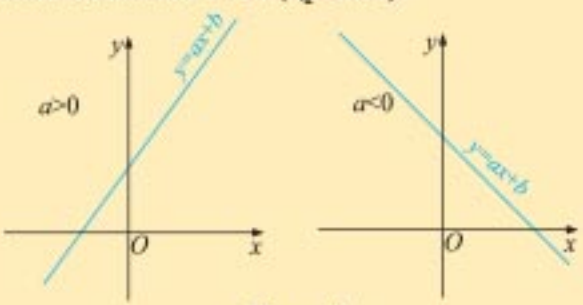
Линеарна функција кај која со зголемување на вредноста на променливата се зголемува и вредноста на функцијата се нарекува **монотоно растечка функција**.
Линеарна функција кај која со зголемување на вредноста на променливата се намалува вредноста на функцијата се нарекува **монотоно опаѓачка функција**.
За константната функција ќе велиме дека ниту монотоно расте ниту монотоно опаѓа.

ПРИМЕР 9

а) Линеарната функција $y = 3x + 4$ е монотоно растечка, бидејќи за $x_1 < x_2$ важи $3x_1 + 4 < 3x_2 + 4$, односно $y(x_1) < y(x_2)$. Забележи дека коефициентот на правец е позитивен.

б) Линеарната функција $y = -3x + 4$ е монотоно опаѓачка, бидејќи за $x_1 < x_2$ важи $-3x_1 + 4 > -3x_2 + 4$, односно $y(x_1) > y(x_2)$. Во овој случај коефициентот на правец е негативен.

Линеарната функција $y = ax + b$ е монотоно растечка ако и само ако $a > 0$, додека е монотоно опаѓачка ако и само ако $a < 0$ (цртеж 8).



Цртеж 8

ЗАДАЧА 4

Џемаил фрла камен со маса од 0,1 килограм од карпа висока 85 метри.

а) Нацртај го графикот на потенцијалната енергија на каменот во зависност од висината, од моментот на фрлање сè до падот на каменот на земја.

б) Дали функцијата е монотоно растечка или е монотоно опаѓачка?

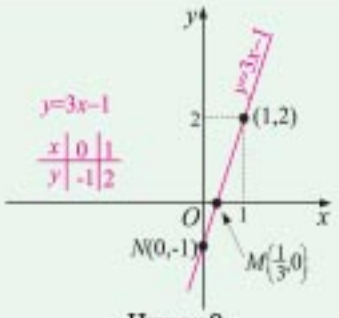
Испитување на текот на линеарна функција

Да се испита текот на една линеарна функција значи:
1. Да се определи дефиниционата област и множеството вредности на функцијата,
2. Да се определат пресеците со координатните оски, и
3. Да се утврди дали функцијата е растечка, опаѓачка или константна.

ПРИМЕР 10

Испитај го текот и скицирај го графикот на линеарната функција $y = 3x - 1$.

1. За дефиниционото множество D и множеството вредности V, имаме $D = V = \mathbb{R}$.
2. Графикот на линеарната функција ја сече
   x – оската во точката $M\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ и
   y – оската во точката $N(0, -1)$.
3. Функцијата е монотона растечка, бидејќи коефициентот на правецот е позитивен. Конструкцијата на графикот е прикажана на цртеж 9.



Цртеж 9

ЗАДАЧА 5

Верверичката Верка има 3000 јатки за да ја преживее зимата. Функцијата која го опишува бројот на собрани јатки на Верка во оваа година е дадена со $y = 60x + n$, каде што x е бројот на денови во кои Верка собирала јатки.

а) Ако оваа година Верка собирала јатки 43 дена, колку јатки и преостанале од минатата година?

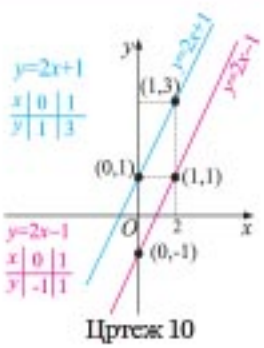
б) Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата.

Равенка на права. Услов за паралелност и нормалност на две прави

Видовме дека графикот на линеарна функција е права. Од тие причини аналитичкиот израз за линеарната функција $y = ax + b$, каде што a и b се реални броеви, може да го толкуваме како **равенка на права**, со **коефициент на правец** a и **отсечок на ординатната оска** b.

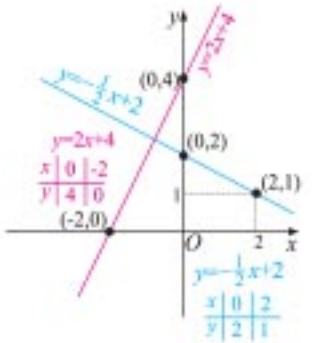
ПРИМЕР 11

а) На цртеж 10 се прикажани две паралелни прави $y = 2x + 1$ и $y = 2x - 1$.
За нивните коефициенти на правци важи $a_1 = a_2 = 2$.



Цртеж 10

б) На цртеж 11 се прикажани две заемно нормални прави $y = 2x + 4$ и $y = -\frac{1}{2}x + 2$. За нивните коефициенти на правци важи $a_1 \cdot a_2 = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$



Цртеж 11

Условот за паралелност на две прави гласи:
Две прави $y = a_1x + b_1$ и $y = a_2x + b_2$ се паралелни ако и само ако $a_1 = a_2$.

Условот за нормалност на две прави гласи:
Две прави $y = a_1x + b_1$ и $y = a_2x + b_2$ се нормални ако и само ако $a_1 \cdot a_2 = -1$.

ПРИМЕР 12

Дадена е правата $y = \frac{1}{4}x + 2$. Запиши ја равенката на правата којашто е:

а) паралелна на дадената права и минува низ точката $A(4, 8)$,

б) нормална на дадената права и минува низ точката $A(-3, 1)$.

а) Дадената права има коефициент на правец $a_1 = \frac{1}{4}$. Според условот за паралелност на две прави, коефициент на правец на бараната права е $a_2 = \frac{1}{4}$. Бараната права минува низ $A(4, 8)$, што значи $8 = \frac{1}{4} \cdot 4 + b_2$, што значи $b_2 = 7$. Равенката на бараната права гласи $y = \frac{1}{4}x + 7$.

б) Дадената права има коефициент на правец $a_1 = \frac{1}{4}$. Според условот за нормалност на две прави, коефициент на правец на бараната права е $a_2 = -4$. Бараната права минува низ $A(-3, 1)$, што значи $1 = -4 \cdot (-3) + b_2$, што значи $b_2 = -11$. Равенката на бараната права гласи $y = -4x - 11$.

ЗАДАЧА 6

Даден е триаголникот ABC со темињата $A(-5, -2)$, $B(7, 6)$ и $C(5,4)$. Запиши ја равенката на висината кон страната AB.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Периметарот на рамнокрак триаголник L, со основа 4 cm и крак b ($b > 2$cm) е $L = 4\text{ cm} + 2b$.
   а) Запиши ја линеарната функција која ја определува зависноста на периметарот од кракот на триаголникот.
   б) Колку изнесува коефициентот на правецот, а колку отсечокот на ординатната оска на линеарната функција?
   в) Определи ги дефиниционото множество и множеството вредности на функцијата.

2. Најди ги пресеците со координатните оски на графикот на линеарната функција:
   а) $y = x - 3$ б) $y = \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}$ в) $y = \frac{4 - x}{9}$ г) $y = \frac{2}{7} - \frac{x + 1}{3}$

3. Пресметај ја вредноста на коефициентот на правецот a во линеарната функција:

   а) $y = ax + 7$, ако $x_0 = -\frac{2}{3}$ е нула на функцијата,

   б) $y = \frac{1}{a+1}x + \frac{3}{a}$, ако нејзиниот график ја сече y – оската во точката $N(0, 3)$,

   в) $y = \frac{2a+3}{5}x - \frac{1+x}{3}$, ако нејзиниот график минува низ точката $M(1, 1)$.

4. Која од следните функции е растечка, а која е опаѓачка:

   а) $y = -x - 3$ б) $y = \frac{1}{2} - 3x$ в) $y = \frac{x}{4} + 2$ г) $y = -x$

5. Испитај го текот и скицирај го графикот на линеарната функција:

   а) $y = -x + 7$ б) $y = 3x + 9$ в) $y = 2 - 6x$ г) $y = x - 6$.

6. Електричен автомобил е вклучен во домашен полнач. Батеријата има капацитет од 100 киловат-часови електрична енергија. Полначот ја полни батеријата со константна брзина од 8 киловат-часови електрична енергија на секој час.

   а) Напиши линеарна функција што го моделира нивото на батеријата, ако батеријата била празна на почетокот.

   б) Колку енергија има во батеријата по 4,5 часа?

   в) Колку време ќе биде потребно за целосно полнење на батеријата?

7. Преостанатиот капацитет на батеријата на мобилниот телефон изразена во проценти во зависност од времето е дадена со функцијата $y = -5x + 80$, каде што x е времето изразено во часови. Луле го приклучува телефонот на полнач штом телефонот има преостанат капацитет од 15%.

   а) По колку време Луле ќе го приклучи телефонот на полнач?

   б) Нацртај го графикот за преостанатиот капацитет на телефонот во зависност од времето.

   в) Дали функцијата е монотоно растечка или монотоно опаѓачка?

8. Температурата на чаша топол чај опаѓа за 3 °C секоја минута. Почетната температура на чајот е 85°C.

   а) Колку степени ќе има чајот по 8 минути?

   б) По колку минути чајот ќе достигне температура од 40 °C?

   в) Испитај го текот и нацртај го графикот на функцијата.

9. При електролиза на вода со јачина на струја од 1 ампер, количеството на ослободен водород е $y = (0{,}115x + 0{,}5)$ милилитри, каде што x е времето изразено во секунди.

   а) Нацртај график на количеството на ослободен водород во зависност од времето.

   б) Колкаво е количеството на слободен водород при почетокот на електролизата?

   в) Колку време треба да измине за количеството на ослободен водород да биде поголемо од 20 милилитри?

10. Запиши ја равенката на правата што минува низ точката $A(-2, -5)$ и е паралелна на правата $y = 4x + 7$.

11. Одреди три пара паралелни прави од дадените равенки:

$y = 7 - x$	$2y + 5x = 3$	$5y - x = 2$	$5x = 7 - 2y$	$x - y = 3$
$x + y = 27$	$-x = 5y$	$3y + 5 = 3x$	$y + 5x = 1$	$3y - 5x = 5$

12. Најди ја равенката на правата која е нормална на $2x + 2y = 5$ и минува низ точката $B(1, -2)$.

13. Отсечката MN има крајни точки $M(7, 4)$ и $N(2, 5)$. Запиши ја равенката на правата AB, којашто е нормална на правата MN и ја преполовува отсечката MN.

14. Дадени се темињата $A(-4, -5)$ и $C(3, 8)$ на правоаголник $ABCD$ и равенката на правата $x + 2y - 19 = 0$ на која лежи една негова страна. Запиши ги равенките на правите на кои лежат другите страни на правоаголникот.

ИСТРАЖУВАЊЕ

а) Нацртај ги во ист координатен систем линеарните функции $y = 2x$ и $y = 3x$. Утврди ја врската помеѓу брзината на растење на двете функции во зависност од нивните коефициенти на правци.

б) Нацртај ги во ист координатен систем линеарните функции $y = -2x$ и $y = -3x$. Утврди ја врската помеѓу брзината на опаѓање на двете функции во зависност од нивните коефициенти на правци.

в) Истражи и откриј дали во општ случај постои врска помеѓу брзината на растење, како и брзината на опаѓање кај линеарна функција од облик $y = ax$, во зависност од коефициентот на правец a.

3.4. Степенски функции

ПРИМЕР 1

Ако должината на страната на квадратот е $a = 2$ cm, тогаш плоштината на квадратот изнесува $a^2 = 2^2$ cm^2. Колку ќе биде плоштината на квадратот, ако должината на страната е 3 cm, 4 cm, ..., x cm?

Плоштината на квадратот се менува во зависност од должината на страната.

Функцијата y што ја опишува плоштината на квадратот во зависност од должината на страната x е пример на степенска функција.

Функција од облик $y = ax^n$, каде a е реален број, $a \neq 0$, n е цел број, $n \neq 0, 1$, и x е **независна променлива** се вика **степенска функција**.

Ограничувањето $a \neq 0$ и $n \neq 0, 1$, во дефиницијата е потребно бидејќи за $a = 0$ или $n = 0, 1$, функциите $y = ax^n = 0 \cdot x^n = 0$ и $y = ax^n = ax^0 = a$ се константни функции, а функцијата $y = ax^1 = ax$ е линеарна функција. И двата вида функции не припаѓаат во класата на степенски функции.

ПРИМЕР 2

Функциите $y = x^2$, $y = 5x^7$, $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{2x^6}$ се примери на степенски функции.

1⁰. Нека $y = ax^n$, каде што n е парен природен број.

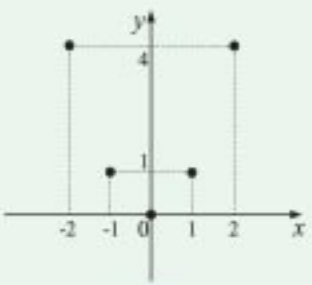
ПРИМЕР 3

Нацртај го графикот на функцијата $y = x^2$.

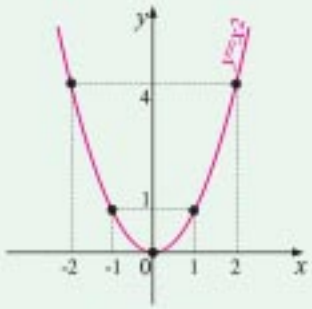
Наоѓаме неколку точки од графикот со помош на табелата на вредности:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	$(-2)^2 = 4$	$(-1)^2 = 1$	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$

Потоа нив ги нанесуваме во избран координатниот систем (цртеж 1).



Цртеж 1



Цртеж 2

Ако ги сврземе со непрекината линија точките чии координати се дадени во табелата, ќе го добиеме графикот на функцијата (цртеж 2). За да добиеме попрецизен график, пожелно е да се земат повеќе точки со координати (x, x^2).

Функцијата $y = x^2$ ја нарекуваме уште и **квадратна функција**.

Во општ случај, **дефиниционата област** $D = \mathbb{R}$, додека **множеството вредности** $V = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Ако функцијата се разгледува во определени услови, дефиниционата област и множеството вредности може да бидат вистинско подмножество од множеството реални броеви, односно од множеството ненегативни реални броеви.

Функцијата **степенски опаѓа** (функцијата е степенска и монотоно опаѓа) на интервалот $(-\infty, 0)$ и **степенски расте** (функцијата е степенска и монотоно расте) на интервалот $(0, +\infty)$.

Графикот на функцијата $y = ax^2$ е крива која се нарекува **парабола**. Точката $O(0, 0)$ се нарекува **теме** на параболата.

ПРИМЕР 4

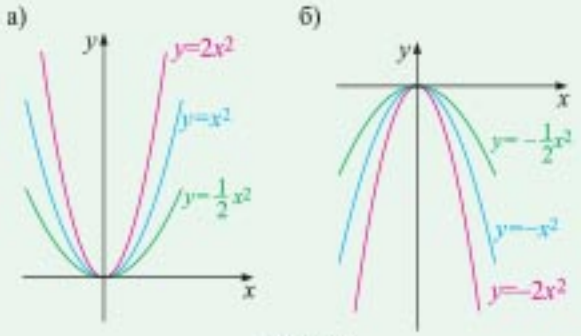
Нацртај ги во ист координатен систем графиците на функциите:

а) $y = x^2, y = 2x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$ б) $y = -x^2, y = -2x^2$ и $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Ја составуваме табелата на вредности за секоја од функциите:

x	-2	-1	0	1	2
$y=x^2$	$(-2)^2=4$	$(-1)^2=1$	$0^2=0$	$1^2=1$	$2^2=4$
$y=2x^2$	$2\cdot(-2)^2=8$	$2\cdot(-1)^2=2$	$2\cdot 0^2=0$	$2\cdot 1^2=2$	$2\cdot 2^2=8$
$y=\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{2}\cdot(-2)^2=2$	$\frac{1}{2}\cdot(-1)^2=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot 0^2=0$	$\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot 2^2=2$
$y=-x^2$	$-(-2)^2=-4$	$-(-1)^2=-1$	$-0^2=0$	$-1^2=-1$	$-2^2=-4$
$y=-2x^2$	$(-2)\cdot(-2)^2=-8$	$(-2)\cdot(-1)^2=-2$	$(-2)\cdot 0^2=0$	$(-2)\cdot 1^2=-2$	$(-2)\cdot 2^2=-8$
$y=-\frac{1}{2}x^2$	$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)^2=-2$	$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)^2=-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0^2=0$	$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1^2=-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2^2=-2$

Ако, поодделно за секоја функција, ги сврземе со непрекината линија точките чии координати се дадени во табелата, ќе го добиеме графикот на функцијата (цртеж 3).



Цртеж 3

а) Функциите $y=x^2$, $y=2x^2$ и $y=\frac{1}{2}x^2$ **степенски опаѓаат** на интервалот $(-\infty, 0)$ и **степенски растат** на интервалот $(0, +\infty)$ (цртеж 3 а)). Графиците на функциите се параболи **отворени нагоре.**

б) Функциите $y=-x^2$, $y=-2x^2$ и $y=-\frac{1}{2}x^2$ **степенски растат** на интервалот $(-\infty, 0)$ и **степенски опаѓаат** на интервалот $(0, +\infty)$ (цртеж 3 б)). Графиците на функциите се параболи **отворени надолу.**

ПРИМЕР 5

а) Како се менува магнетниот квантен број m, ако главниот квантен број е $n = 1, 2, 3, 4, 5$? Што забележуваш?

б) Запиши ја функцијата која го дава вкупниот број на магнетни броеви m во зависност од главниот квантен број n.

в) Нацртај го графикот на функцијата.

Главниот квантен број n го претставува главното енергетско ниво на електронот во атомот. Неговите вредности се $n = 1, 2, 3,\ldots$ За дадено n, допуштени вредности на орбиталниот квантен број се $l = 0, 1, 2,\ldots, n-1$. За дадено l, допуштени вредности на магнетниот квантен број се $m = -l, -l+1,\ldots, 0,\ldots, l-1, l$. Така, бројот на допуштени вредности на m за дадено ниво n е збир од бројот на вредностите на m за секое $l = 0, 1, 2,\ldots, n-1$.

а) Да го пресметаме бројот на допуштени вредности на m, за $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

Ако $n = 1$, тогаш $l = 0$, па според тоа $m = 0$.

Во овој случај вкупниот број на вредности на m е 1 (прикажано во првиот ред од табелата).

Ако $n = 2$, орбиталниот број $l = 0$ или $l = 1$. За $l = 0$, магнетниот број $m = 0$, а за $l = 1$, магнетниот број $m = -1, 0, 1$.

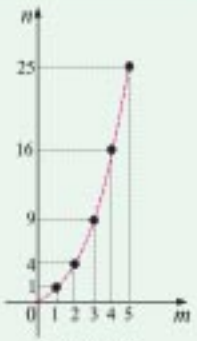
Конечно, вкупниот број на вредности за m е $1 + 3 = 4$ (прикажано во вториот ред од табелата).

n	l	m	Вкупно вредности за m	
1	0	0	1	1
2	0	0	1	4
	1	−1, 0, 1	3	
3	0	0	1	9
	1	−1, 0, 1	3	
	2	−2, −1, 0, 1, 2	5	
4	0	0	1	16
	1	−1, 0, 1	3	
	2	−2, −1, 0, 1, 2	5	
	3	−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3	7	
5	0	0	1	25
	1	−1, 0, 1	3	
	2	−2, −1, 0, 1, 2	5	
	3	−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3	7	
	4	−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4	9	

Бројот на можни вредности на магнетниот квантен број m за даден главен квантен број n изнесува $m = n^2$.

б) Функција која ја дава зависноста на магнетниот квантен број m од главниот квантен број n, е квадратната функција $m=n^2$ чие дефиниционо множество е $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

в) Графикот на функцијата е прикажан на цртеж 4.



Цртеж 4

2^0. Нека $y = ax^n$, каде што n е непарен природен број, $n \neq 1$.

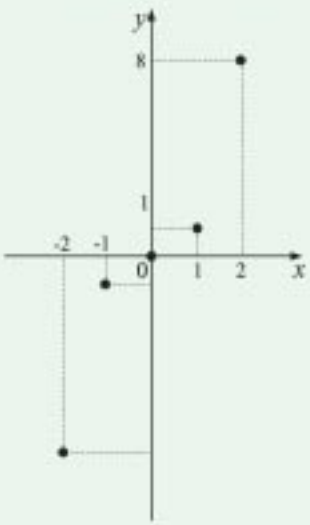
ПРИМЕР 6

Нацртај го графикот на функцијата $y = x^3$.

Наоѓаме неколку точки од графикот со помош на табелата:

x	−2	−1	0	1	2
$y = x^3$	$(-2)^3 = -8$	$(-1)^3 = -1$	$0^3 = 0$	$1^3 = 1$	$2^3 = 8$

Потоа нив ги нанесуваме во избран координатен систем (цртеж 5).



Цртеж 5



Цртеж 6

Ако ги сврземе со непрекината линија точките чии координати се дадени во табелата, ќе го добиеме графикот на функцијата (цртеж 6). Пожелно е да се изберат повеќе точки со координати (x, x^3).

Во општ случај, **дефиниционата област** $D = \mathbb{R}$, а **множеството вредности** $V = \mathbb{R}$. Ако функцијата се разгледува во определени услови, дефиниционата област и множеството вредности може да бидат вистинско подмножество од множеството реални броеви. Функцијата **степенски расте** на целата дефиниционa област. Графикот на функцијата $y = x^3$ се нарекува **кубна парабола.**

ЗАДАЧА 1

Нацртај ги во ист координатен систем графиците на функциите и искажи ги нивните својства:

а) $y = x^3$, $y = 2x^3$ и $y = \frac{1}{2}x^3$ б) $y = -x^3$, $y = -2x^3$ и $y = -\frac{1}{2}x^3$.

3°. Нека $y = ax^n$, каде n е негативен непарен број.

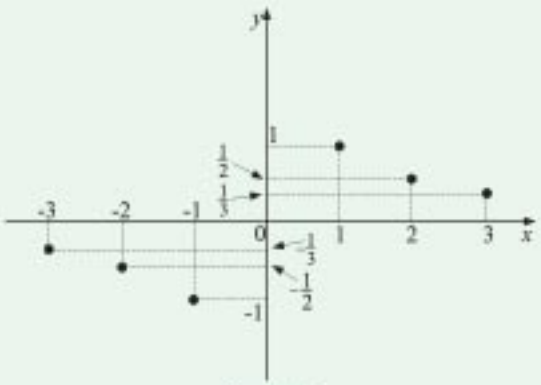
ПРИМЕР 7

Нацртај го графикот на функцијата $y = \frac{1}{x}$.

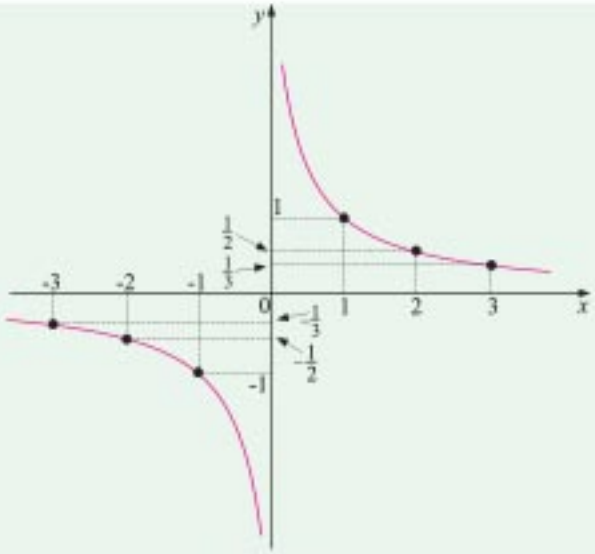
Ја составуваме табелата на вредности за функцијата:

x	-3	-2	-1	1	2	3
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$	$\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{-1} = -1$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Добиените вредности ги нанесуваме во избран координатниот систем (цртеж 7).



Цртеж 7



Цртеж 8

За да го добиеме графикот на функцијата ќе ги сврземе со непрекината линија точките чии координати се дадени во табелата (цртеж 8).

За дефиниционата област и за **множеството вредности** на функцијата $y = \frac{1}{x}$ важи $D = V = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Функцијата **степенски опаѓа на целото дефиниционо множество.** Нејзиниот график е крива која се нарекува **хипербола.**

ЗАДАЧА 2

Нацртај ги во ист координатен систем графиците на функциите и искажи ги нивните својства:

а) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ и $y = \frac{1}{2x}$ б) $y = -\frac{1}{x}$, $y = -\frac{2}{x}$ и $y = -\frac{1}{2x}$

4⁰. Нека $y = ax^n$, каде n е негативен парен број.

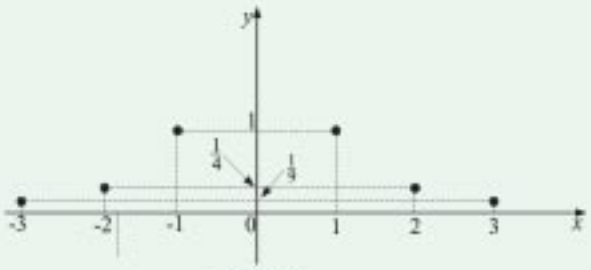
ПРИМЕР 8

Нацртај го графикот на функцијата $y = \frac{1}{x^2}$.

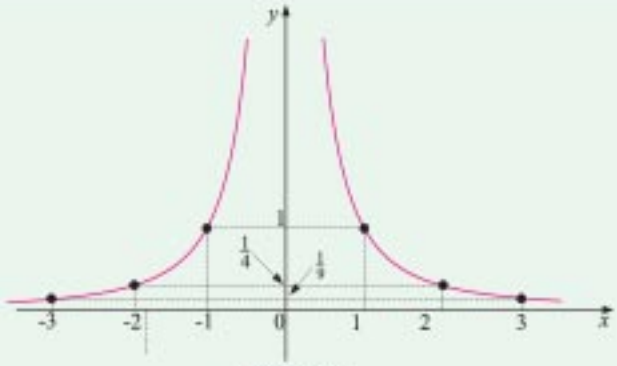
Наоѓаме неколку точки од графикот со помош на табелата:

x	-3	-2	-1	1	2	3
$y = \frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{(-1)^2} = 1$	$\frac{1}{1^2} = 1$	$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Потоа нив ги нанесуваме во избран координатен систем (цртеж 9).



Цртеж 9



Цртеж 10

Со поврзување на добиените точки го добиваме графикот на функцијата (цртеж 10).

Во општ случај, **дефиниционата област** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а **множеството вредности** $V = \mathbb{R}^+$. Функцијата **степенски расте** на интервалот $(-\infty, 0)$ и **степенски опаѓа** на интервалот $(0, +\infty)$.

ЗАДАЧА 3

Нацртај ги во ист координатен систем графиците на функциите и искажи ги нивните својства:

а) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{2}{x^2}$ и $y = \frac{1}{2x^2}$ б) $y = -\frac{1}{x^2}$, $y = -\frac{2}{x^2}$ и $y = -\frac{1}{2x^2}$

ПРИМЕР 9

Во едно вселенско летало астронаутите прават експеримент со кој ќе може да ја измерат гравитационата сила на привлекување на две тела. Експериментот се состои од поставување на телата на растојание од 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm и 5 cm. При првото поставување на телата на растојание од 1 центиметар тие утврдиле дека привлечната гравитациска сила е 3600 микроњутни.

а) Пресметај ја гравитациската сила за другите вредности на растојанието и состави табела на вредности.

б) Според податоците од табелата, нацртај график на зависноста на силата изразена во микроњутни од растојанието изразено во центиметри.

а) Гравитациската сила на привлекување на две тела е дадена со формулата

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad (1)$$

каде што F е силата, G е гравитационата константа, m_1 и m_2 се масите на телата, а r е растојанието помеѓу телата.

Масите на телата може да ги сметаме за константни, бидејќи тие не се менуваат во текот на експериментот. Од формулата (1) добиваме дека $G \cdot (m_1 \cdot m_2) = F \cdot r^2$.

Со замена за силата $F_1 = 3600$ микроњутни (μN) и растојанието $r_1 = 1$ центиметар, наоѓаме дека

$$G \cdot (m_1 \cdot m_2) = F_1 \cdot r_1^2 = 3600 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N} \cdot (0.01\mathrm{m})^2 = 3600 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{Nm}^2.$$

Ако ја означиме со F_2 силата кога растојанието $r_2 = 2$ центиметри, тогаш од формулата (1) добиваме дека

$$F_2 = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r_2^2} = \frac{3600 \cdot 10^{-10}\mathrm{Nm}^2}{4 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2} = 900 \cdot 10^{-6}\mathrm{N}$$

На истиот начин за гравитациската сила при растојание $r_3 = 3$ центиметри, $r_4 = 4$ центиметри и $r_5 = 5$ центиметри, добиваме

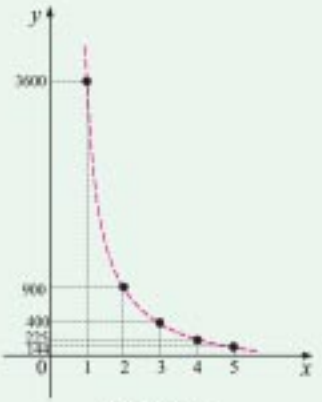
$F_3 = 400 \cdot 10^{-6}$ N, $F_4 = 225 \cdot 10^{-6}$ N и $F_5 = 144 \cdot 10^{-6}$ N.

Добиените резултати од пресметките ги внесуваме во табела:

1	2	3	4	5
3600	900	400	225	144

б) Според податоците од табелата го цртаме графикот на зависноста на силата изразена во микроњутни од растојанието изразено во центиметри.

Секој единичен поделок на x – оската ќе ни означува 1 центиметар, независно колкава е должината на тој поделок. Исто така имаме слобода сами да избереме колку μN ќе ни претставува еден поделок по y – оската. Бидејќи силата се движи помеѓу 144 μN и 3600 μN, ќе избереме еден поделок да изнесува 500 μN.



Цртеж 11

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

Нацртај ги во ист координатен систем графиците на функциите:

1. а) $y = x^2, y = 3x^2$ и $y = \frac{1}{3}x^2$ б) $y = -x^2, y = -3x^2$ и $y = -\frac{1}{3}x^2$
2. а) $y = x^3, y = 3x^3$ и $y = \frac{1}{3}x^3$ б) $y = -x^3, y = -3x^3$ и $y = -\frac{1}{3}x^3$
3. а) $y = \frac{1}{x}, y = \frac{3}{x}$ и $y = \frac{1}{3x}$ б) $y = -\frac{1}{x}, y = -\frac{3}{x}$ и $y = -\frac{1}{3x}$
4. а) $y = \frac{1}{x^2}, y = \frac{3}{x^2}$ и $y = \frac{1}{3x^2}$ б) $y = -\frac{1}{x^2}, y = -\frac{3}{x^2}$ и $y = -\frac{1}{3x^2}$
5. Карпа се одронува од морски гребен висок 40 метри.
   а) Колку време ќе биде потребно за карпата да падне во морето? За земјиното забрзување користи $g = 10\ m/s^2$.
   б) На која висина над морето ќе се наоѓа карпата на половина од времето потребно за пад на карпата?
6. Малата Шејла си игра со мали коцки. Секоја мала коцка има страна од 1 центиметар. Шејла ги спојува коцките и од нив формира коцки со страни од 2 центиметри до 6 центиметри.
   а) Колку мали коцки и се потребни на Шејла за да ги направи поголемите коцки?
   б) Направи табела на која ќе ја прикажеш зависноста на бројот на употребени мали коцки за правење на поголемите коцки.
7. а) Симе врти топче врзано на конец со должина од 25 центиметри. Ако секоја секунда топчето прави по еден цел круг, определи ги аголната брзина и брзината на движење на топчето. Ако топчето има маса од 50 грама, најди ја центрипеталната сила на движењето на топчето.
   б) Симе ја намалува должината на конецот за 5 центиметри се додека таа не стане 5 центиметри задржувајќи го движењето на топчето секоја секунда да прави по еден цел круг. Определи како ќе се менува големината на центрипеталната сила.

8. Растојанието помеѓу Земјата и Месечината се менува помеѓу 363 300 километри и 405 500 километри. Пресметај за колку проценти ќе се намали гравитационата сила кога Месечината е најдалеку од Земјата во однос на гравитационата сила кога Месечината е најблиску до Земјата?

ИСТРАЖУВАЊЕ

Истражи и спореди ја брзината на степенското растење, односно брзината на степенското опаѓање на функцијата $y = ax^n$ во однос на функцијата $y = x^n$, ако:

а) $-\infty < a < -1$ б) $1 < a < +\infty$ в) $-1 < a < 0$ г) $0 < a < 1$.

3.5. Експоненцијална функција

ПРИМЕР 1

Бактериите најчесто се размножуваат преку проста делба, при што од една бактерија се добиваат две. Да претпоставиме дека започнуваме со култура со една бактерија која се дели секој час. Тоа значи дека бројот на бактерии се удвојува на крајот од секој час.

Во табелата е прикажан бројот на бактерии на крајот од секој час. Гледаме дека една бактерија се репродуцира во над илјада бактерии за само десет часа.

Часови	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Бактерии	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

За да опишеме процеси и состојби од слична природа, ќе ја воведеме експоненцијалната функција. За таа цел, потребно е да предочиме дека за секој позитивен реален број a и за секој реален број x, степенот a^x е еднозначно определен позитивен реален број. Притоа, за секој позитивен реален број $a \neq 1$ и за секој позитивен број A, постои единствен реален број x така што $a^x = A$.

Функција од облик $y = Ma^x$, каде што $a > 0$ и $a \neq 1$, $M > 0$ и x е **независна променлива** се вика **експоненцијална функција.**

Ограничување $a \neq 1$ во дефиницијата е потребно заради фактот дека при $a = 1$ функцијата $y = a^x = 1^x = 1$ е константната функција која не припаѓа во класата на експоненцијални функции.

ПРИМЕР 2

Функциите $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = 0{,}25^x$, се примери на експоненцијални функции.

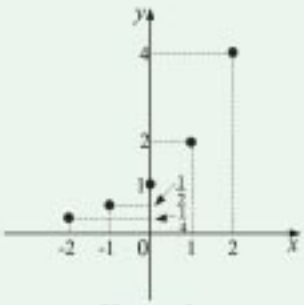
ПРИМЕР 3

Нацртај го графикот на функцијата $y = 2^x$.

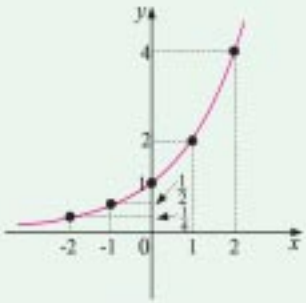
Наоѓаме неколку точки од графикот со помош на табелата

Потоа нив ги нанесуваме во избран координатен систем (цртеж 1).

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$



Цртеж 1



Цртеж 2

Ако нанесеме повеќе точки добиваме претстава за нејзиниот график (цртеж 2).

Степенот 2^x е дефиниран за секоја вредност на x, па затоа **дефиниционата област** D на дадената експоненцијална функција е множеството реални броеви, односно $D = \mathbb{R}$.
Бидејќи $2^x > 0$ за секој реален број x, и бидејќи за секој позитивен реален број A постои единствен реален број x така што $2^x = A$, **множеството вредности** на дадената експоненцијална функција се состои од сите позитивни реални броеви, односно $V = \mathbb{R}^+$.

Функцијата **експоненцијално расте** (функцијата е експоненцијална и монотоно расте) бидејќи од $x_1 < x_2$ следува дека $2^{x_1} < 2^{x_2}$.
Графикот на фукцијата минува низ точката $(0, 1)$.
Кога вредностите на x неограничено опаѓаат, соодветните вредности на функцијата остануваат позитивни, се намалуваат и никогаш не достигнуваат вредност нула. Тоа значи дека графикот на функцијата се приближува кон x – оската, но никогаш нема да ја пресече ниту да ја допре x – оската. Тогаш велиме дека x – оската е **асимптота** на функцијата $y = 2^x$.
Што точно значи експоненцијално растење?

Експоненцијалното растење подразбира, зголемување со константна мултипликативна стапка во еднакви временски интервали, на почетното количество во текот на времето.
Процеси во кои имаме експоненцијалното растење во текот на времето најчесто се моделираат со експоненцијална функција од облик $y = M a^x$, $a > 1$ и $a \neq 1$, $M > 0$
Ако функцијата се разгледува во определени услови, дефиниционата област може да биде вистинско подмножество од множеството реални броеви $\mathbb{R}$.

ПРИМЕР 4

За да добиеме појасна претстава за експоненцијалното растење, ќе ги споредиме вредностите на експоненцијалната функција $y = 2^x$, со вредностите на степенската функција $y = x^2$ и линеарната функција $y = 2x$.

x	$y=2^x$	$y=x^3$	$y=2x$
0	1	0	0
1	2	1	2
2	4	4	4
3	8	9	6
4	16	16	8
5	32	25	10
6	64	36	12

Од табела можеме да заклучиме дека, експоненцијалното растење е побрзо од степенското растење, а степенското растење е побрзо од линеарното растење.

ПРИМЕР 5

Во лабораторија со идеални услови за живеење има два вида бактерии, Ешерихија коли и Клостриди перфрингес. Репродуктивен период на ешерихија коли е 20 минути, на клостриди перфрингес е 10 минути. На почетокот на експериментот има приближно по 3 бактерии од секој вид и се претпоставува дека ни една бактерија нема да изумре.

а) Колку бактерии од секој вид ќе има за 1 час?

б) Запиши ја функцијата за бројот на бактерии во зависност од времето за бактеријата ешерихија коли.

в) Запиши ја функцијата за бројот на бактерии во зависност од времето за бактеријата клостриди перфрингес.

г) Нацртај ги двете функции во ист координатен систем, а потоа утврди која функција има побрз експоненцијален раст и објасни зошто.

а) На почетокот има по 3 бактерии од секој вид. Експериментот трае 1 час = 60 минути. Бактеријата ешерихија коли се дели на секои 20 минути. За период од 60 минути се дели $60:20=3$ пати. Тоа значи дека бројот на бактерии се удвојува 3 пати. Бројот на бактерии по 1 час ќе изнесува $3\cdot 2^3=3\cdot 8=24$

Бактеријата клостриди перфрингес се дели на секои 10 минути. За период од 60 минути се дели $60:10=6$ пати. Тоа значи дека бројот на бактерии се удвојува 6 пати. Бројот на бактерии по 1 час ќе изнесува $3\cdot 2^6=3\cdot 64=192$

По 1 час ќе има 24 бактерии ешерихија коли и 192 бактерии клостриди перфрингес.

б) Експоненцијалната функција за бројот на бактерии во зависност од времето за бактеријата ешерихија коли е $y_1=3\cdot 2^{\frac{x}{20}}$ каде што $y_1(x)$ е бројот на бактерии по x минути.

в) Експоненцијалната функција за бројот на бактерии во зависност од времето за бактеријата клостриди перфрингес е $y_2=3\cdot 2^{\frac{x}{10}}$ каде што $y_2(x)$ е бројот на бактерии по x минути.

г) Табела на вредности за бројот на бактерии во зависност од времето за ешерихија коли:

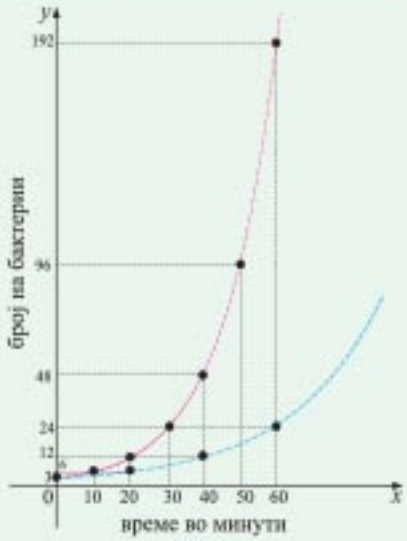
Време во минути	0	20	40	60
Број на бактерии	3	$3\cdot 2=6$	$3\cdot 2^2=12$	$3\cdot 2^3=24$

Табела на вредности за бројот на бактерии во зависност од времето за клостриди перфрингес:

Време во минути	0	10	20	30	40	50	60
Број на бактерии	3	$3 \cdot 2 = 6$	$3 \cdot 2^2 = 12$	$3 \cdot 2^3 = 24$	$3 \cdot 2^4 = 48$	$3 \cdot 2^5 = 96$	$3 \cdot 2^6 = 192$

На цртеж 3, графикот со сина боја го прикажува експоненцијалното растење на функцијата за бактеријата ешерихија коли, а графикот со црвена боја го прикажува експоненцијалното растење на функцијата за бактеријата клостриди перфрингес.

Побрзо експоненцијално растење има функцијата за бактеријата клостриди перфрингес, бидејќи бактеријата се дели почесто.



Цртеж 3

ЗАДАЧА 2

Андра прави хемиски експеримент во кој прави „слоновска паста за заби“. Волуменот на пастата се зголемува двојно по секоја секунда.

а) Ако почетниот волумен е 1024 кубни милиметри, колку ќе изнесува волуменот по 1 секунда?

б) Колку ќе биде волуменот по 6 секунди?

в) Како ќе се менува волуменот на пастата во однос на времето изразено во секунди? Запиши ја функцијата и нацртај го графикот.

АКТИВНОСТ

Бабата на Ели направила колач за нејзиниот осумнаесетти роденден. На Ели многу ѝ се допаднал колачот, па првиот ден изела половина од колачот. Нејзината баба ѝ рекла дека ако продолжи да јаде со таа брзина, ќе го изеде колачот за неколку дена. Ели смислила паметен план: таа секогаш ќе јаде половина од колачот што ѝ преостанал од претходниот ден. Таа мисли дека на овој начин може да јаде колач секој ден и никогаш нема да го дојаде.

По првиот ден на Ели ќе ѝ преостане $\frac{1}{2}$ од колачот.

По вториот ден ќе ѝ преостане $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ од колачот.

По третиот ден ќе ѝ преостане $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ од колачот, итн.

а) Колкав дел од колачот ќе ѝ преостане по петтиот ден?

б) Дали Ели никогаш нема да го дојаде колачот?

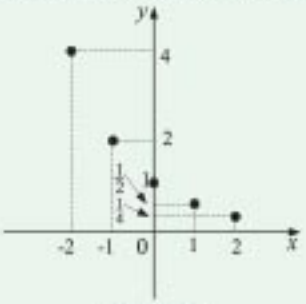
ПРИМЕР 6

Нацртај го графикот на функцијата $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

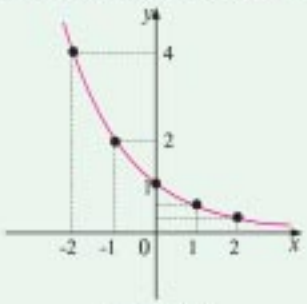
Наоѓаме неколку точки од нејзиниот график:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$

Добиените точките ги нанесуваме во избран координатен систем (цртеж 4). Поврзувајќи ги овие точки со непрекинатата линија, го добиваме графикот на функцијата (цртеж 5).



Цртеж 4



Цртеж 5

Дефиниционата област D на функцијата е множеството реални броеви, односно $D = \mathbb{R}$, додека множеството вредности V на функција се состои од сите позитивни реални броеви, односно $V_f = \mathbb{R}^+$.

Функцијата **експоненцијално опаѓа** (функцијата е експоненцијална и монотоно опаѓа), бидејќи од $x_1 < x_2$ следува дека $2^{x_1} > 2^{x_2}$.
Графикот на функцијата минува низ точката $(0, 1)$.
Кога вредностите на x неограничено растат, соодветните вредности на функцијата остануваат позитивни, се намалуваат и никогаш не достигнуваат вредност нула. Тоа значи дека графикот на функцијата се приближува кон x – оската, но никогаш нема да ја пресече ниту да ја допре x – оската. Значи x – оската е **асимптота** на функцијата $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

ЗАДАЧА 3

Нацртај го графикот на експоненцијалната функција $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Што точно значи експоненцијално опаѓање?

Експоненцијалното опаѓање подразбира, намалување со константна мултипликативна стапка во еднакви временски интервали, на почетното количество во текот на времето.

Процеси во кои имаме експоненцијалното опаѓање во текот на времето најчесто се моделираат со експоненцијална функција од облик

$y = M a^x, 0 < a < 1$ и $a \neq 1, M > 0$.

И во овој случај, ако функцијата се разгледува во определени услови, дефиниционата област и множеството вредности може да бидат вистинско подмножество од множеството реални броеви $\mathbb{R}$.

ПРИМЕР 7

Радиоактивна супстанца А има полуживот од 20 минути. Тоа значи дека на секои 20 минути останува половина од масата на супстанцата што се распаѓа. Радиоактивна супстанца В има полуживот од 30 минути. Почетната маса на секоја супстанца е 16 грама.

а) Колку грама ќе останат по 1 час од секоја супстанца?

б) Запиши ја функцијата што го моделира процесот на распаѓање на супстанцата А.

в) Запиши ја функцијата што го моделира процесот на распаѓање на супстанцата В.

г) Нацртај ги двете функции во ист координатен систем, а потоа утврди која функција има побрзо експоненцијално опаѓање и објасни зошто.

а) На почетокот има по 16 грама од секој вид супстанца. Процесот трае 1 час = 60 минути. Масата на супстанцата А се преполовува на 20 минути. За период од 1 час се преполовува $60 : 20 = 3$ пати.

Масата на супстанцата А по 1 час ќе изнесува $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2$ грама. Масата на супстанцата В се преполовува на 30 минути. За период од 1 час се преполовува $60 : 30 = 2$ пати.

Масата на супстанцата В по 1 час ќе изнесува $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$ грама. По 1 час ќе има 2 грама од супстанцата А и 4 грама од супстанцата В.

б) Експоненцијалната функција што го моделира процесот на распаѓање на супстанцата А е $y_1 = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{20}}$ каде што $y_1(x)$ е количеството супстанца во грамови по x минути.

в) Експоненцијалната функција што го моделира процесот на распаѓање на супстанцата В е $y_2 = 16\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{30}}$ каде што $y_2(x)$ е количеството супстанца во грамови по x минути.

г) Табела на вредности за количеството на супстанцата А во зависност од времето:

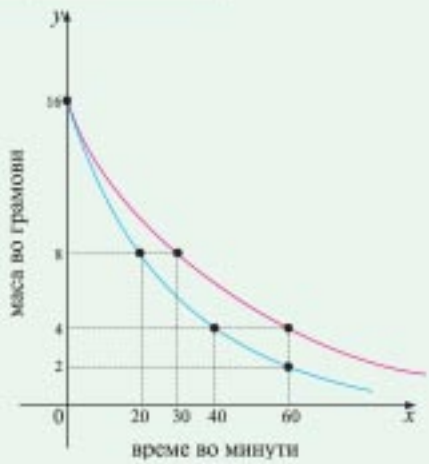
Време во минути	0	20	40	60
Количество во грамови	16	$16\left(\frac{1}{2}\right) = 8$	$16\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$	$16\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2$

Табела на вредности за количеството на супстанца В во зависност од времето:

Време во минути	0	30	60
Количество во грамови	16	$16\left(\frac{1}{2}\right) = 8$	$16\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$

На цртеж 6, графикот со сина боја го прикажува експоненцијалното опаѓање на масата на супстанцата А, а графикот со црвена боја експоненцијалното опаѓање на масата на супстанцата В.

Побрзо експоненцијално опаѓање има кај супстанцата А, бидејќи таа има покус полуживот.



Цртеж 6

ЗАДАЧА 4

Антибиотик се внесува во организмот во доза од 200 милиграми. Телото разградува половина од лекот на секои 6 часа. Колку милиграми од антибиотикот ќе останат во организмот по:

а) 6 часа б) 12 часа в) 18 часа?

Запиши ја функцијата што го моделира процесот на разградување на антибиотикот во однос на времето и нацртај го нејзиниот график.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Искажи ги својствата на функцијата:

   а) $y = 6^x$ б) $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$ в) $y = 12 \cdot 4^x$ г) $y = 9\left(\frac{1}{9}\right)^x$

2. Нацртај го графикот на функцијата, а потоа определи дали експоненцијално расте или експоненцијално опаѓа функцијата:

   а) $y = 4^x$ б) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ в) $y = 2 \cdot 5^x$ г) $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$

3. При процес на митоза од една клетка се добиваат две идентични копии. Бактерија се размножува со помош на митоза на секои 5 секунди.

   а) Ако митозата започне со една клетка, тогаш колку клетки ќе има по 5 секунди?

   б) Колку клетки ќе има по 15 секунди, а колку по една минута?

   в) Запиши ја функцијата која ќе го прикажува бројот на бактерии по $5x$ секунди.

   г) Нацртај го графикот на функцијата за првите 30 секунди.

4. РНК структурата се формира со комбинација на 4 основни РНК бази: Аденин, Цитозин, Гуанин и Урацил.

   а) На колку начини може да се формира една основна РНК база?

   б) На колку начини може да се формира комбинација од две основни РНК бази?

   в) Запиши ја функцијата со која се пресметува бројот на начини на кои може да се формираат n РНК бази?

5. Лабораториски експеримент се состои од оставање на колонија од 10^6 стафилококни бактерии да се размножуваат во период од 2 часа. По 2 часа се аплицира пеницилин и започнува уништување на бактериите. Бројот на бактериите се зголемува 4 пати на секои 40 минути, а пеницилинот уништува половина од бактериите на секои 20 минути.

   а) Нацртај график на кој ќе го прикажеш бројот на бактерии изразен во 10^6 бактерии во зависност од времето, ако експериментот трае 6 часа.

   б) Колку ќе изнесува бројот на бактерии на крајот од експериментот?

6. Во една држава со голема инфлација, банката дава камата на штеден влог од 100% на годишно ниво и дозволува подигање на штедниот влог после цел број на години. Состави табела на вредности за функцијата која го дава износот на штедниот влог после 1, 2, 3, 4, 5 години, а потоа нацртај го нејзиниот график.

7. Во 2020 година, популацијата на риби има 16 777 216 единки. Популацијата на животни живее во еколошки загадена средина и нејзиниот број се намалува со стапка од 75% секоја година. Колкава ќе биде популацијата на животни во 2030 година?

8. Ненад има бактериска инфекција. Кога отишол на лекар, популацијата на бактерии броела 2 милиона. Лекарот му препишал антибиотик кој ја намалува популацијата на бактерии на $\frac{1}{4}$ од нејзината големина секој ден.

а) Најди ја големината на популацијата на бактерии по 10 дена од првото земање на лекот.

б) Најди ја големината на популацијата на бактерии по 14 дена од првото земање на лекот.

в) Запиши ја функцијата што ја моделира големината на популацијата.

г) Нацртај го графикот на големината на популацијата изразена во 10^6 бактерии во зависност од времето во денови.

ИСТРАЖУВАЊЕ

а) Нацртај ги во ист координатен систем експоненцијалните функции $y = 3^x$ и $y = 4^x$. Утврди ја врската помеѓу брзината на експоненцијалното растење на двете функции во зависност од нивните степенски основи.

б) Нацртај ги во ист координатен систем експоненцијалните функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Утврди ја врската помеѓу брзината на опаѓање на двете функции во зависност од нивните степенски основи.

в) Истражи и открий дали во општ случај постои врска помеѓу брзината на експоненцијалното растење, како и брзината на експоненцијалното опаѓање кај експоненцијална функција од облик $y = a^x$ во зависност од степенската основа a.

ИСТРАЖУВАЊЕ

а) Запиши ги префиксите и вредностите на декадните и децималните множители помеѓу мили и кило од најмал до најголем. Каква е врската помеѓу нив? Определи функција која ќе ги определи вредностите на множителите.

б) Запиши ги множителите помеѓу кило и тера од најмал до најголем. Каква е врската помеѓу нив? Определи функција која ќе ги определи вредностите на множителите.

в) Запиши ги множителите помеѓу пико и микро од најмал до најголем. Каква е врската помеѓу нив? Определи функција која ќе ги определи вредностите на множителите.

3.6. Видови равенки и еквивалентни равенки со една непозната

Видови равенки

АКТИВНОСТ

Прочитај ги алгебарските записи кои одговараат на исказите:
Аднан има y книги.

Бојан има 5 книги повеќе од Аднан. Бојан има $(y + 5)$ книги.

Даниел има една книга помалку од Аднан. Даниел има $(y-1)$ книги.
Јован има двапати повеќе книги од Аднан. Јован има $2y$ книги.

Запиши алгебарски изрази за бројот на книги на Онур, ако тој има трипати повеќе книги од Бојан.

Ако ги сврземе алгебарските изрази, на пример изразите $x+5$ и $2x$ со знакот за равенство, ја определуваме равенката $x+5=2x$ по непознатата x, чие дефиниционо множество може да биде множеството реални броеви.

Два алгебарски рационални изрази од кои барем еден израз има една или повеќе променливи, сврзани со знакот „=“ (еднакво), определуваат **равенка**.
Променливите во равенката ги нарекуваме **непознати**, и ги означуваме со $x, y, z, \ldots$

Множеството допуштени вредности на непознатите се вика **дефиниционо множество** на равенката и се означува со D. Се договараме дефиниционото множество да биде максималното множество на вредности за кои равенката има смисла, доколку поинаку не е кажано.

ПРИМЕР 1

а) Равенката $5x+3=2$ е равенка по непознатата x и има дефиниционо множество $D=\mathbb{R}$.
б) Равенката $\frac{1}{y-2}=3$ е равенка по непознатата y и има дефиниционо множество $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Според бројот на непознати, равенката може да биде: **равенка со една непозната, равенка со две непознати** итн.
Според најголемиот степен со кој се степенуваат непознатите, равенката може да биде **равенка од прв степен или линеарна, равенка од втор степен или квадратна** итн.

ПРИМЕР 2

а) Равенката $2x+4=7$ е линеарна равенка со една непозната.
б) Равенката $x+y=2x$ е линеарна равенка со две непознати.
в) Равенката $x^2=x+y$ е квадратна равенка со две непознати.

ПРИМЕР 3

Равенката $7-3x=1$, за $x=2$ преминува во точно бројно равенство $7-3\cdot 2=1$
за $x=3$ преминува во неточно бројно равенство $7-3\cdot 3=1$

Решение или **корен на равенка** со една непозната е секоја вредност на непознатата од дефиниционото множество за која равенката преминува во точно бројно равенство.

Сите решенија на една равенка го сочинуваат **множеството решенија на равенката** и ќе го означуваме со R.

ПРИМЕР 4

а) Равенката $2 + x = 5$ има единствено решение во множеството $x = 3$, односно $R = \{3\}$.

б) За равенката $6 + 3x = 3(2 + x)$ множеството решенија $R = D = \mathbb{R}$. Во ваков случај велиме дека равенката е **идентитет**.

в) За равенката $7 + 3x = 2 + 3x$ множеството решенија $R = \varnothing$. Во ваков случај велиме дека равенката е **невозможна**.

Еквивалентни равенки со една непозната

АКТИВНОСТ

Што може да заклучиш за дефиницоното множество и множеството решенија на равенките: $2 + x = 5$ и $x - 3 = 0$.



Две равенки кои имаат исто дефиниционо множество и исто множество решенија се нарекуваат **еквивалентни равенки**.

За да решиме дадена равенка, истата ја заменуваме со друга поедноставна, но еквивалентна на неа. Потоа, таа равенка ја заменуваме со трета поедноставна еквивалентна на неа, итн., се додека не дојдеме до равенка чии решенија се очигледни.
Постапката на замена на равенка со равенка еквивалентна на неа се нарекува **еквивалентна трансформација**.

АКТИВНОСТ

Проследи ја замената на дадената равенка со поедноставна равенка која е еквивалентна на неа, и чие решение е очигледно:

$x - 7 = 2$ Кон двете страни на равенката го додаваме бројот 7.

$x - 7 + 7 = 2 + 7$ Добиената равенка е еквивалентната на дадената равенка.

$x = 9$ Дојдовме до решението на равенката $x_0 = 9$.

Дали до истото решение ќе дојдеш ако бројот – 7 го пренесеш на другата страна, со спротивен знак?



Ако кон двете страни на равенката додадеме еден ист израз, кој е дефиниран за сите допуштени вредности на непознатата, ќе добиеме равенка еквивалентна на дадената.

Како последица имаме дека:

- Ако двете страни на равенката имаат еднакви членови со исти знаци, тие може да се поништат (изостават).
- Секој член на равенката може да се пренесе од едната страна на равенката на другата страна, и притоа неговиот знак се менува во спротивен.

ПРИМЕР 5

Проследи ги еквивалентните трансформации на равенката:

а) $7x - 3x + 2 = 9 - 3x$ Ги поништуваме еднаквите членови: $-3x$ и $-3x$.

$7x + 2 = 9$ Добиената равенка е еквивалентната на дадената.

б) $5x - 4 = 2x + 5$ Членот $2x$ го пренесуваме на левата страна на равенката, неговиот знак ќе се промени во спротивен.

$5x - 2x - 4 = 5$ Членот -4 го пренесуваме на десната страна од равенката, неговиот знак ќе се промени во спротивен.

$5x - 2x = 5 + 4$ Добиената равенка е еквивалентната на дадената равенка



Ако двете страни на равенката ги помножиме со еден ист израз, кој е дефиниран и различен од нула за сите допуштени вредности на непознатата, ќе добиеме равенка еквивалентна на дадената. Како последица имаме дека:

- Знаците на сите членови на равенката се менуваат во спротивни, ако двете страни на равенката се помножат со -1.
- Ако двете страни на равенката имаат заеднички множител, кој не ја содржи непознатата и е различен од нула, тогаш со него може да се поделат двете страни на равенката. Во тој случај велиме дека **равенката ја скратуваме**.

ПРИМЕР 6

Проследи ги еквивалентните трансформации на равенката:

а) $-3x + 7 = 3$ Двете страни на равенката ги множиме со бројот -1.

$3x - 7 = -3$ Добиената равенка е еквивалентна на дадената.

б) $2x - 4 = 6$ Ја скратуваме равенката.

$x + 2 = 4$ Добиената равенка е еквивалентна на дадената.

Да забележиме дека со примена на погорното својство, равенка со дробни коефициенти може да се трансформира во равенка со цели коефициенти, ако двете страни на равенката се помножат со некој заеднички содржател на именителите. Ваквата трансформација се нарекува **ослободување на равенката од именители**.

ПРИМЕР 7

Ослободи ја од именители равенката $\frac{x-1}{2} - 5 = \frac{x+2}{3}$.

$\frac{x-1}{2} - 5 = \frac{x+2}{3}$ Секој член се множи со НЗС на именителите: НЗС(2, 3) = 6

$6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot 5 = 6 \cdot \frac{x+2}{3}$ за да се ослободиме од именителите.

$3(x-1) - 30 = 2(x+2)$ Добиената равенка е еквивалентна на дадената равенка.

ЗАДАЧА 1

Ослободи ја од именители равенката $\frac{5(x+2)}{6} - \frac{2(x-1)}{3} = \frac{3(x-2)}{2}$.

ЗАДАЧА 2

Автомобилот се движи со постојана брзина. Ако започнеме со мерење на времето напладне, по x часа, автомобилот ќе помине $60x + 20$ километри. Во колку часот попладне автомобилот ќе помине 200 километри?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Дали следниве равенки се еквивалентни:
   а) $7x + 3x = 12 + 7x$ и $3x = 12$ б) $3 = \frac{15}{x}$ и $3x = 15$ в) $x + \frac{1}{x} = 5 + \frac{1}{x}$ и $x = 5$?
2. За која вредност на x бројната вредност на изразот $5x - 2$ е еднаква на:
   а) 8 б) 7 в) 0 г) 6?
3. За која вредност на x изразите $3x - 2$ и $4x + 1$ имаат еднакви бројни вредности?
4. Со примена на неколку еквивалентни трансформации, реши ја равенката:
   а) $14 - 3x = 8 - 6x$ б) $2(3x - 1) = 22$ в) $\frac{6-5x}{3} + \frac{2x-1}{4} = \frac{x-4}{6}$
5. Кои од следниве равенки се идентитети:
   а) $5x - 2x = 3x$ б) $\frac{4x+4}{16} = \frac{x+1}{2}$ в) $\frac{x-1}{15} + \frac{2x}{5} = \frac{3x-4}{3}$
6. Кои од следниве равенки се невозможни равенки:
   а) $7x - x = 6x + 3$ б) $2(x - 3) + 2 = x + 6$ в) $\frac{2x-1}{2} = \frac{3x+2}{3}$
7. Телефонска батерија се полни со константна брзина. По x минути телефонот е наполнет на $2x + 10\%$. Колку минути се полнела батеријата, ако таа е наполнета на 70%?
8. Хемискиот раствор се лади линеарно. Неговата температура после x минути е $100 - 4x$ Целзиусови степени. Колку минути се ладел раствор кој достигнал температура од 60°C?

3.7. Решавање на линеарни равенки и равенки што се сведуваат на линеарни равенки со една непозната

Решавање на линеарни равенки со една непозната

АКТИВНОСТ

Со примена на еквивалентни трансформации на равенката $7x + 4 = 8 + 5x$ пренеси ги сите членови на левата страна и сведи ги. Опиши го обликот на добиената равенка.

Со погодно избрани елементарни трансформации секоја линеарна равенка со една непозната се сведува на линеарна равенка од видот

$$ax + b = 0 \qquad (1)$$

каде што a и b се броеви или изрази во кои не се јавува непознатата x. Равенката (1) се нарекува **општ вид на линеарна равенка со една непозната**, a се вика **коефициент** пред непознатата, а b се вика **слободен член**.

АКТИВНОСТ

Најди го множеството решенија на линеарната равенка: а) $2x + 4 = 0$ б) $0 \cdot x = 2$ в) $0 \cdot x = 0$.

Да го испитаме множеството решенија на линеарната равенка (1):

1°. $ax + b = 0, a \neq 0$ — Го пренесуваме b на десната страна на равенката, а потоа делиме со a.

$x = -\frac{b}{a}$ — Добиената равенка е еквивалентна на дадената.

Таа има **единствено решение** $x_0 = -\frac{b}{a}$.

2°. $ax + b = 0, a = 0$ и $b \neq 0$ — Го пренесуваме b на десната страна на равенката, а потоа заменуваме $a = 0$.

$0 \, x = -b$ — Добиената равенка е еквивалентна на дадената равенка. Таа е **невозможна**, бидејќи не постои реален број кој помножен со нула дава број различен од нула.

3°. $ax + b = 0, a = 0$ и $b = 0$ — Заменуваме $a = 0$ и $b = 0$.

$0 \cdot x = 0$ — Добиената равенка е еквивалентна на дадената равенка. Таа има **бесконечно многу решенија**, бидејќи секој реален број помножен со нула дава нула.

ПРИМЕР 1

Реши ја равенката $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} = \frac{x+14}{2} - 2$.

$\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} = \frac{x+14}{2} - 2$ — Двете страни на равенката ги множиме со НЗС (3, 4, 2) = 12 за да се ослободиме од

$12 \cdot \frac{5x-2}{3} - 12 \cdot \frac{x-8}{4} = 12 \cdot \frac{x+14}{2} - 12 \cdot 2$ именителите.

$4(5x-2) - 3(x-8) = 6(x+14) - 12 \cdot 2$ — Се ослободуваме од заградите.

$20x - 8 - 3x + 24 = 6x + 84 - 24$ — Ги групираме сите членови што ја содржат непознатата на левата страна, а сите слободни членови на десната страна.

$20x - 3x - 6x = 84 - 24 + 8 - 24$

$11x = 44$ — Ја скратуваме равенката со бројот 11.

$x = 4$ — Решението на равенката е $x_0 = 4$.

Ако равенката ја содржи непознатата во именителот, тогаш по ослободување на именителите може да се добие равенка која ги содржи сите решенија на дадената равенка, но патем таа може да придобие и други решенија, за кои НЗС на именителите се анулира.

Ако има такви решенија, тие треба да се исклучат од множеството решенија.

ПРИМЕР 2

Реши ја равенката $\frac{15}{x} - \frac{7-x}{x-2} = 1$.

$\frac{15}{x} - \frac{7-x}{x-2} = 1$	Двете страни на равенката ги множиме со производот $x(x-2)$, $x \neq 0$ и $x \neq 2$ за да се ослободиме од именителите.
$\frac{15x(x-2)}{x} - \frac{(7-x)\cdot x\cdot(x-2)}{x-2} = x(x-2)$	
$15(x-2) - x(7-x) = x(x-2)$	Се ослободуваме од заградите.
$15x - 30 - 7x + x^2 = x^2 - 2x$	Ги групираме членовите со и без непознатата и ги сведуваме сличните членови.
$10x = 30$	Ги делиме двете страни со бројот 10.
$x = 3$	Решението на равенката е $x_0 = 3$.

ПРИМЕР 3

Реши ја равенката $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4}$.

$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4}$	Двете страни на равенката ги множиме со изразот $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, $x \neq -2$ и $x \neq 2$.
$(x-2) - (x+2) = 2x$	Ги групираме членовите со и без непознатата и ги сведуваме сличните членови.
$2x = -4$	$x_0 = -2$ не е решение на равенката.
$x = -2$	Множеството решенија на равенката $R = \emptyset$, па равенката е невозможна.

ПРИМЕР 4

Реши ја равенката $\frac{2x-7}{x-5} = 1 - \frac{2-x}{x-5}$.

$\frac{2x-7}{x-5} = 1 - \frac{2-x}{x-5}$	Двете страни на равенката ги множиме со изразот $x-5$, $x \neq 5$.
$2x - 7 = x - 5 - (2-x)$	Ги групираме членовите со и без непознатата и ги сведуваме сличните членови.
$0 \cdot x = 0$	Решенија на равенката се сите реални броеви x, така што $x \neq 5$. Запишуваме $R = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

ЗАДАЧА 1

Распореди ги равенките во правилен редослед за да добиеш точно решение на почетната равенка. Некои од равенките не се точни. Откриј ги грешките кои се направени при решавањето за да се добијат неточните равенки.

$2x = 3$ $x = 1{,}5$	$2x = -15$ $x = 6$	$3(5x - 3) = 13x - 6$ $15x - 9 = 13x - 6$	$15x - 6 = 13x - 6$ $2x - 9 = -6$

ЗАДАЧА 2

При електролиза на вода со константна јачина на струја, количеството на ослободен водород по t часови е $\frac{t}{2}$ литри. За колку часови ќе се наполни балон со волумен од 1,5 литри?

Линеарна равенка со параметар

Параметарот во линеарна равенка со една непозната подразбира „константа чија вредност може да се менува" во определено назначено множество. Менувањето на параметрот во назначеното множество непосредно влијае на множеството решенија на равенката.

ПРИМЕР 5

Реши ја равенката $ax - 2 = x$, каде што a е реален параметар.

$ax - 2 = x$ — Ги групираме членовите со и без непознатата и ги сведуваме сличните членови.

$ax - x = 2$ — Извлекуваме заеднички множител пред заграда.

$(a - 1)x = 2$ — Започнуваме дискусија по вредностите на параметарот a:

- Ако $a - 1 = 0$, односно $a = 1$, тогаш равенката го добива обликот $0 \cdot x = 2$. Во овој случај равенката е невозможна и множеството решенија е $R = \emptyset$.
- Ако $a - 1 \neq 0$, односно $a \neq 1$, тогаш равенката има единствено решение $x_0 = \frac{2}{a-1}$.

Една линеарна равенка со една непозната може да содржи и повеќе параметри. Во тој случај дискусијата за множеството решенија на равенката се води по секој параметар поодделно, како и по евентуалните врски меѓу нив.

ПРИМЕР 6

Реши ја равенката $\frac{x}{a+b} + \frac{x}{b} = \frac{b}{a+b}$, каде што a и b се реални параметри.

Пред да започнеме со решавање треба да ги определиме вредностите на параметрите за кои равенката нема смисла.

Во случајот не е допуштено делење со 0, па според тоа треба $b \neq 0$ и $a \neq -b$.

Велиме дека равенката ја решаваме под услов $b \neq 0$ и $a \neq -b$.

$\frac{x}{a+b} + \frac{x}{b} = \frac{b}{a+b}$ — Ги множиме двете страни на равенката со изразот $b(a+b)$

$\frac{b(a+b)x}{a+b} + \frac{b(a+b)x}{b} = \frac{b(a+b)b}{a+b}$ — за да се ослободиме од именителите.

$bx + (a+b)x = b^2$ — Извлекуваме заеднички множител пред заграда.

$(a+2b)x=b^2$ Започнуваме дискусија по вредностите на параметрите a и b.

- Ако $a+2b=0$, односно $a=-2b$, тогаш равенката добива облик $0\cdot x=b^2$.
  Во овој случај равенката е невозможна и множеството решенија $R=\emptyset$.
- Ако $a+2b\neq 0$, односно $a\neq -2b$, тогаш равенката има единствено решение $x_0=\frac{b^2}{a-2b}$.

ЗАДАЧА 3

За која вредност на параметарот a, равенката:

а) $5x+a=2$ има решение $x_0=0$ б) $5a-2x=3$ има решение $x_0=1$?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Реши ги равенките:

а) $(x-1)(x-2)-(x-3)(x-4)=6$ б) $3x^2-(3x+2)(x-1)=8$ в) $t(t-3)+4=t^2-2(t+4)$

2. Реши ги равенките:

а) $x-\frac{2}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{9-2x}{3}$ б) $\frac{y+17}{5}+2=\frac{3y-7}{4}$ в) $\frac{14x-1}{15}+\frac{2x-3}{5}=\frac{3x-4}{3}$

3. Реши ги равенките:

а) $1+\frac{2x-\frac{10-7x}{3}}{2}=\frac{x}{2}+\frac{x-\frac{1+x}{3}}{3}$ б) $x+\frac{1+\frac{3x}{2}}{4}+\frac{2+\frac{x}{4}}{3}=2$

4. Реши ги равенките:

а) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=3$ б) $\frac{5}{x}-\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x-1}$ в) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=2-\frac{x}{x^2-1}$

5. Реши ги равенките:

а) $\frac{2}{2x-3}+\frac{2x-3}{x}=2$ б) $\frac{y+1}{y-3}-\frac{y-1}{y+3}=\frac{8y}{y^2-9}$ в) $\frac{2}{x}+\frac{x+2}{x(x-2)}=\frac{4}{x(x-2)}$

6. Реши ја равенката со параметар:

а) $(x+k)^2=x(x+k)+5k^2$ б) $n(1+y)=m(1-y)$ в) $\frac{x-a}{x-1}+\frac{x-1}{x-a}=2$

7. За која вредност на параметарот a, равенката

а) $ax-6=a+2(x-4)$ има единствено решение б) $x-2ax=2a+5$ е невозможна?

8. Количеството лабораториски произведено месо после t секунди е $\frac{10+6t}{7}$ грама. Колку време е потребно за создавање на мала плескавица од 100 грама лабораториско месо?

9. Издолжувањето на една механичка пружина што се прави со поставување на x мали тегови е $\frac{62+4x}{3}$ милиметри. Определи го бројот на тегови потребни да се издолжи пружината до 110 милиметри.

3.8. Составување и решавање на линеарни равенки со една непозната

АКТИВНОСТ

Една фабрика добила нарачка од 86 заврtки. Тие треба да ги пакува во три кутии така што:

Во првата кутија да има x заврtки.

Во втората кутија да има $x + 6$ заврtки.

Во третата кутија да има $2x$ заврtки.

Состави равенка според која ќе можеш да го најдеш бројот на заврtки во секоја кутија.

Решавањето на многу проблеми од природните и општествените науки, како и проблеми од нашето секојдневие, се сведуваат на составување и решавање на линеарни равенки со една непозната. Притоа, најсериозен дел од решавањето на проблемот е негово преведување во соодветна алгебарска форма. Иако нема строго определени правила за решавање на овие задачи, сепак, може да издвоиме неколку чекори, како постапно да дојдеме до решението на поставениот проблем.

ПРИМЕР 1

Збирот на два броја е 94. Поголемиот број е за 5 помал од двапати помалиот број. Кои се тие броеви?

1. Го издвојуваме прашањето: Кои се двата броја?
2. Ги означуваме непознатите величини: со x помалиот број и со $94 - x$ поголемиот број.
3. Ја определуваме алгебарската врска: поголемиот број е за 5 помал од двапати помалиот број.
4. Ја составуваме равенката: $94 - x = 2x - 5$.
5. Ја решаваме равенката:

$$\begin{aligned} 94 - x &= 2x - 5 \\ 94 + 5 &= 2x + x \\ 99 &= 3x \\ x &= 33 \end{aligned}$$

Решението на равенката е $x_0 = 33$.

Помалиот број е 33, а поголемиот е $94 - 33 = 61$.

6. Вршиме проверка на резултатот: $33 + 61 = 94$ и $94 - 33 = 2 \cdot 33 - 5$.

Да напоменеме дека проверката е неопходна, бидејќи може да се случи равенката да е правилно поставена и решена, но за добиените решенија задачата да нема смисла.

ПРИМЕР 2

Јана е 7 години постара од нејзиниот брат. По 5 години збирот на нивните години ќе изнесува 63. Колку години има секој од нив?

1. Прашање: Колку години имаат Јана и нејзиниот брат?
2. Непознати величини: x е бројот на години на Јана, $x - 7$ е бројот на години на нејзиниот брат.

3. За да дојдеме до алгебарската врска, условите дадени во задачата ги прикажуваме во табела

Величини	Јана	Братот на Јана
број на години	x	$x-7$
број на години по 5 години	$x+5$	$(x-7)+5$

Бројот на годините на Јана по 5 години собран со бројот на годините на нејзиниот брат по 5 години е 63.

4. Ја составуваме равенката $(x+5)+(x-7)+5=63$.
5. Ја решаваме равенката $(x+5)+(x-7)+5=63$:

$(x+5)+(x-7)+5=63$

$2x+3=63$

$x=30$ Јана во моментов има 30 години, а нејзиниот брат $30-7=23$ години.

6. Проверка на резултатот: $(30+5)+(23+5)=63$.

ПРИМЕР 3

Петар имал 6500 денари во банкноти од по 50, 100 и 500 денари. Тој имал еднаков број на банкноти од секој вид. По колку банкноти имал од секој вид?

Петар имал x банкноти од секој вид. Условите дадени во задачата ќе ги прикажеме во табела

Величини	Банкноти од по 50 денари	Банкноти од по 100 денари	Банкноти од по 500 денари
број на банкноти	x	x	x
Вредност во денари	50	100	500
вкупна вредност во денари	$50x$	$100x$	$500x$

Бидејќи вкупната сума пари што ја имал Петар изнесувала 6500 денари, може да ја поставиме равенката $50x+100x+500x=6\,500$

чие што решение е $x_0=10$. Според тоа, Петар имал по 10 банкноти од секој вид.

Проверка: $50\cdot 10+100\cdot 10+500\cdot 10=6\,500$

Да напоменеме дека решението има смисла, само ако бројот на банкноти x е природен број.

ПРИМЕР 4

Во еден супермаркет цените на прехранбените артикли се намалиле за 40%. Ако цената на еден производ е 180 денари, најди ја неговата цена пред објавување на намалението.

Нека производот пред објавување на намалението чинел x денари. Ако цената на производот се намалила за 40%, тогаш цената на производот се намалила за $0{,}4x$ денари. Бидејќи цената на производот сега е 180 денари, доаѓаме до равенката

$x-0{,}4x=180$

чие што решение е $x_0=300$.

Цената на производот пред објавување на намалението била 300 денари.

Проверка: $300-0{,}4\ 300=180$.

ПРИМЕР 5

За заградување на правоаголна градина потребни се 130 метри жица. Должината на градината е за 5 метри поголема од ширината. Најди ги димензиите на градината.

Нека градината е широка x метри. Тогаш нејзината должина е $x + 5$ метри. Ако знаеме дека за заградување на градината потребни се 130 метри жица, може да ја составиме равенката

$2x + 2(x + 5) = 130$

чие што решение е $x_0 = 30$.

Градината е широка 30 метри и долга 35 метри.

Проверка: $2 \cdot 30 + 2(30 + 5) = 130$.

ПРИМЕР 6

Еден базен се полни со две цевки за 6 часа. Првата цевка го полни базенот за 10 часа. За колку часа втората цевка го полни базенот?

Првата цевка го полни базенот за 10 часа, што значи за еден час полни $\frac{1}{10}$ од базенот.

Втората цевка го полни базенот за x часа, што значи дека за еден час полни $\frac{1}{x}$ од базенот.

Двете цевки заедно го полнат базенот за 6 часа, што значи за еден час полнат $\frac{1}{6}$ од базенот.

Бидејќи делот од базенот што го полнат двете цевки за еден час, независно од тоа дали го полнат базенот заедно или поодделно, останува ист, може да ја составиме равенката $\frac{1}{10} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6}$ која за $x \neq 0$ е еквивалентна со равенката $3x + 30 = 5x$ чие решение е $x_0 = 15$.

Втората цевка го полни базенот за 15 часа.

Проверка: $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$.

ПРИМЕР 7

Роботот е програмиран да се движи со константна брзина од v метри во секунда. За време од t секунди, поминал вкупно растојание од d метри.

Запиши линеарна равенка со која ќе го изразиш растојанието d преку времето t, користејќи го v како параметар.

Ако роботот се движи со $v = 1{,}5$ метри во секунда, колку време ќе биде потребно да се помине 120 метри?

Од физика ти е познато дека

$d = v \cdot t$ d е растојание (во метри)

v е брзина (параметар, во метри во секунда)

t е време (во секунди)

Со замена на дадените вредности $v = 1{,}5$ метри во секунда и $d = 120$ метри, во равенката добиваме

$120\,\text{m} = 1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$

што значи дека времето $t = 80$ секунди.

На роботот ќе му бидат потребни 80 секунди за да помине 120 метри со брзина од 1,5 m/s.

ЗАДАЧА 1

Потребно е да се постави соларен систем за куќа што троши 4500 Wh (ват-часови) електрична енергија дневно. На располагање се соларни панели кои произведуваат 250Wh електрична енергија секој од нив, а сонцето свети 6 часа дневно. Колку соларни панели се потребни за да се задоволи потребната дневна енергија?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Мајката на Адор е 3 пати постара од Адор. По 14 години таа ќе биде 2 пати постара од него. Колку години има секој од нив?

2. Една компанија доставува нови сервер компјутери во два центри за чување податоци. Вкупниот број на сервер компјутери е 72. Вториот центар за чување податоци ќе добие двојно повеќе компјутери од првиот центар за чување податоци. Колку сервер компјутери ќе добие секој центар за чување податоци?

3. Пресметај ги плоштините на зеленият и белиот правоаголник на цртеж 1, ако зелено обоениот дел изнесува 28 квадратни центиметри. Димензиите на цртеж 1 изразуваат броеви во центиметри.



Цртеж 1

4. Овоштарникот со јаболка на дедо Агим е 1 200 квадратни метри. За да го заштити од град, неговиот внук Ардијан решил да му купи заштитна мрежа. Ако мрежата има правоаголна форма со ширина од 5 метри, која должина на заштитна мрежа треба Ардијан да купи за да го заштити целиот овоштарник на дедо Агим?

5. Смешани се 10 литри 40% алкохол со 5 литри 53% алкохол. Колку процентен алкохол е смесата?

6. Велосипедист поминал пат од 18 километри за време за кое пешак поминал 10 километри. Ако велосипедистот се движел со брзина за 9,6 километри на час поголема од брзината со која се движел пешакот, со која брзина се движел секој од нив?

7. За производство на електрична енергија РЕК Битола користи 1 килограм јаглен за да произведе 0,6 киловат-часови електрична енергија. Јана забележала дека на инвертер клима уредот му се потребни 2 часа работа за да ја покачи температурата за еден степен Целзиусов. Ако јачината на клима-уредот е 2,4 киловати, колку јаглен ќе се заштеди ако Јана реши да ја загрее собата на температура од 22 степени Целзиусови, наместо на 23 степени Целзиусови?

8. Дејан сака до го определи времето потребно за дигестија на 10 ќебапчиња со тежина од 12 грама по ќебапче. За дигестија на 15 милиграми протеини во желудникот потребен е 1 милиграм од ензимот пепсин.
   а) Колку милиграми пепсин се потребни за дигестија на ќебапи, ако протеините претставуваат 20% од масата на месото?
   б) Колку часа ќе трае дигестијата на ќебапи, ако организмот произведува 200 милиграми пепсин секој час?

9. Телефонскиот сигнал во телефонската мрежа се движи со брзина на светлината, $3 \cdot 10^8$ метри во секунда, додека звукот се движи со брзина од 340 метри во секунда. Ана и Бојан зборуваат на два телефона кои се оддалечени 1,7 метри. Колкав пат минува телефонскиот сигнал доколку звукот од слушалката и гласот на Ана, Бојан ги слуша истовремено?

3.9. Систем од две линеарни равенки со две непознати

Линеарна равенка со две непознати

АКТИВНОСТ

Запиши равенка според исказот:
„Иван има 24 тетратки од кои $5x$ се сини тетратки и $7y$ се зелени тетратки".
Колку непознати содржи равенката што ја запиша?
Кој е најголемиот степен со кој се степенувани непознатите во равенката?

Равенка со две реални непознати од прв степен се вика **линеарна равенка со две непознати.**
Решение на линеарна равенка со две непознати е секој подреден пар од реални броеви за кој равенката преминува во точно бројно равенство.

ПРИМЕР 1

а) Равенки со две непознати се, на пример, равенките $5x - 6y = 9$, $3x = 4y$ и $y = 1 - x$.
б) За равенката $2x + 3y = 4$, парот $(2, 0)$ е нејзино решение бидејќи $2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4$, додека парот $(2, -4)$ не е нејзино решение бидејќи $2 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) \neq 4$.

ЗАДАЧА 1

Определи ја вредноста на параметарот m така што парот $(1, 2)$ да биде решение на равенката
$(2x - 3)m - 6 = y + m$.

Ако две линеарни равенки со две исти непознати имаат еднакви множества решенија, тогаш тие се нарекуваат **еквивалентни.**
Со следниве **еквивалентни трансформации** извршени на една линеарна равенка со две непознати се добива еквивалентна равенка на неа:

- едната страна од равенката се замени со идентично еднаков израз.
- на двете страни од равенката се додаде ист израз, односно некој член на равенката се пренесе од едната на другата страна, но со спротивен знак.
- двете страни од равенката се помножат или поделат со ист број различен од нула.

ПРИМЕР 2

Проследи ја замената на дадената равенка со поедноставна равенка која е еквивалентна на неа:
$\frac{y-2}{6}-\frac{x}{3}=y-\frac{x+1}{4}$

Двете страни на равенката ги множиме со НЗС $(6, 3, 4) = 12$

$12\left(\frac{y-2}{6}-\frac{x}{3}\right)=12\left(y-\frac{x+1}{4}\right)$	Скратуваме.
$2(y-2)-4x=12y-3(x+1)$	Се ослободуваме од заградите.
$2y-4-4x=12y-3x-3$	Членовите $12y$ и $-3x$ ги пренесуваме на левата страна на равенката, нивниот знак ќе се промени во спротивен.
	Членот -4 го пренесуваме на десната страна од равенката, неговиот знак ќе се промени во спротивен.
$2y-4x-12y+3x=-3+4$	Ги сведуваме сличните членови.
$-x-10y=1$	Добиената равенка е еквивалентна на дадената равенка.

Со погодно избрани елементарни трансформации секоја линеарна равенка со две непознати се сведува на линеарна равенка од видот

$$ax+by=c, \qquad (1)$$

каде што a, b и c се броеви или изрази во кои не се јавуваат непознатите x и y. Равенката (1) се нарекува **општ вид на линеарна равенка со две непознати**, a и b се викаат **коефициенти** пред непознатите, а c се вика **слободен член**.

ЗАДАЧА 1

Со еквивалентни трансформации, доведи ја равенката $\frac{x}{2}-\frac{y-3}{5}-2=3-x$ во општ облик.

Да го испитаме множеството решенија на линеарната равенка (1):

1⁰. $ax+by=c, a\neq 0$
Секој подреден пар $\left(\frac{c-bk}{a}, k\right), k\in\mathbb{R}$, е решение на равенката.
Множеството решенија на равенката е $R=\left\{\left(\frac{c-bk}{a}, k\right)\middle| k\in\mathbb{R}\right\}$.

2⁰. $ax+by=c, a=b=0, c\neq 0$
Равенката нема реални решенија, множеството решенија е $R=\emptyset$.

3⁰. $ax+by=c, a=b=c=0$
Секој подреден пар реални броеви е решение на равенката, множеството решенија е $R=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

ПРИМЕР 3

Реши ја равенката: а) $3(x-2)+2(y-3)=2x+y$ б) $3(x-2)+2(y-3)=3x+2y$

а) $3(x-2)+2(y-3)=2x+y$ $x+y=12$	Равенката ја доведуваме во поедноставен еквивалентен облик $a=1\neq 0$. Множеството решенија е $R=\{(12-k, k)\mid k\in\mathbb{R}\}$.
б) $3(x-2)+2(y-3)=3x+2y$ $-12=0$	Равенката се доведува до поедноставен еквивалентен облик. $a=b=0, c=-12\neq 0$. Множеството решенија е $R=\emptyset$.

Множеството од сите точки во рамнината чии координати (x, y) се решенија на линеарна равенка со две непознати $ax + by = c$ се вика **график на линеарната равенка.**

Ако $a \neq 0$ и $b \neq 0$, тогаш линеарната равенка со две непознати $ax + by = c$ е еквивалентна со равенката

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b},$$

што всушност е линеарна функција, чиј график е права со коефициент на правец $-\frac{a}{b}$.
Специјално, ако $a = 0$, тогаш правата е паралелна со x – оската.

Ако $a \neq 0$ и $b = 0$, тогаш линеарната равенка со две непознати $ax + by = c$ е еквивалентна со равенката

$$x = \frac{c}{a}$$

чиј график претставува права паралелна со y – оската.

ПРИМЕР 4

Нацртај го графикот на линеарната равенка со две непознати:

а) $x - 2y = 6$ б) $4(x + y) = 8 + 4x$ в) $3(x - y) = 6 - 3y$

а) $x - 2y = 6$ Равенката ја доведуваме во еквивалентен облик.

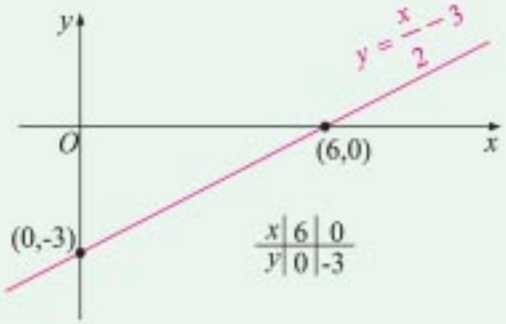
$y = \frac{x}{2} - 3$ Нејзиниот график е правата $y = \frac{x}{2} - 3$ (цртеж 1).

б) $4(x + y) = 8 + 4x$ Равенката ја доведуваме во еквивалентен облик

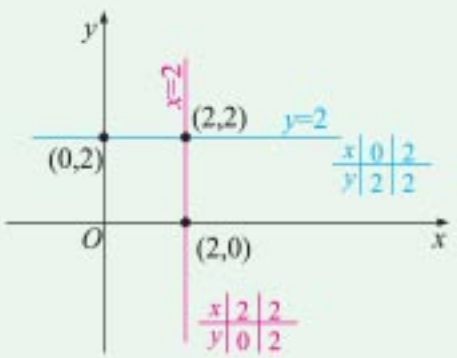
$y = 2$ Нејзиниот график е правата $y = 2$ (цртеж 2).

в) $3(x - y) = 6 - 3y$ Равенката ја доведуваме во еквивалентен облик.

$x = 2$ Нејзиниот график е правата $x = 2$ (цртеж 2).



Цртеж 1



Цртеж 2

ЗАДАЧА 1

Една фабрика произведува два производи A и B. За производство на едно парче од производот А потребни се 4 работни часа, додека за производство на едно парче од производот В потребни се 6 работни часа. Фабриката работи со капацитет од 120 часа месечно.

Колку парчиња месечно ќе се произведат од производот A, ако месечно се произведуваат по 16 парчиња од производот B?

Систем од две линеарни равенки со две непознати

АКТИВНОСТ

Запиши две равенки според исказот.
„Дрита има 14 парчиња облека од кои $3x$ се блузи и $2y$ се панталони. Блузи има за 2 повеќе отколку пантолони".
Колку непознати содржи секоја равенка што ја запиша?
Кој е најголемиот степен со кој се степенувани непознатите во секоја равенка?
Што претставува множество од двете линеарни равенки со две исти непознати што ги запиша?

Множество од две линеарни равенки со две исти реални непознати се вика **систем од две линеарни равенки со две непознати**.

ПРИМЕР 5

Системот $\begin{cases} x-2y=1 \\ x-y=-2 \end{cases}$ е пример на систем од две линеарни равенки со две непознати.

Решение на систем од две линеарни равенки со две непознати е секој подреден пар реални броеви (x, y) кој е решение на секоја равенка од системот.

ПРИМЕР 6

а) $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ x-4y=-2 \end{cases}$ Подредениот пар $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ е решение на секоја равенка на системот, па според тоа е решение на даденият систем.
Подредениот пар $(-3, 5)$ е решение на равенката $3x+2y=1$, но не е решение на равенката $x-4y=-2$, па според тоа не е решение на даденият систем.

б) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ Системот нема решение, бидејќи збирот на два броја не може истовремено да прими две различни вредности.

в) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ Системот има бесконечно многу решенија, бидејќи постојат бесконечно многу реални броеви чиј збир е еднаков на еден.

Два система од линеарни равенки со две непознати се **еквивалентни** ако имаат еднакви множества решенија.

Ако секоја равенка од системот се замени со нејзина еквивалентна, тогаш се добива систем кој е еквивалентен со почетниот. Бидејќи секоја линеарна равенка со две непознати е еквивалентна со равенка од општ вид $ax+by=c$, секој систем од две линеарни равенки со две непознати може да се сведе во **општ вид**

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

каде што a_1, a_2, b_1 и b_2 се **коефициенти пред непознатите**, а c_1 и c_2 се **слободни членови**.

ПРИМЕР 3

Сведи го во општ вид системот $\begin{cases} 2(x+1)-3=5(y+2) \\ \frac{x}{3}-\frac{y+2}{5}=1 \end{cases}$.

$2(x+1)-3=5(y+2)$	Првата равенка од системот се заменува со
$2x-5y=11$	еквивалентна равенка на неа во општ вид.
$\frac{x}{3}-\frac{y+2}{5}=1$	Втората равенка од системот се заменува со
$5x-3y=21$	еквивалентна равенка на неа во општ вид.
$\begin{cases} 2x-5y=11 \\ 5x-3y=21 \end{cases}$	Добиениот систем е еквивалентен на даденият и е во општ вид.

Ако со помош на елементарни трансформации еден систем се доведе до облик $\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$ тогаш парот (p, q) е решение на системот.

ПРИМЕР 4

$\begin{cases} 2(x+y)-3=2y+1 \\ 3x-y+1=-2x+5(x+1) \end{cases}$	Го доведуваме системот до општ вид.
$\begin{cases} 2x=4 \\ -y=4 \end{cases}$	Применуваме елементарни трансформации.
$\begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$	Читаме дека подредениот пар $(2, -4)$ е решение на системот.

Главната идеја на сите методи за решавање систем од две линеарни равенки со две непознати е системот со помош на низа еквивалентни трансформации да се доведе до обликот

$$\begin{cases} x=p \\ y=q \end{cases}$$

Тогаш читаме дека подредениот пар (p, q) е решение на системот.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Дрин фрла две топки со маса од 0,1 килограми вертикално нагоре. Запиши израз со кој може да се пресмета збирот на потенцијалните енергии на двете топки, ако првата се наоѓа на висина x, а втората на висина y. Изразот за потенцијална енергија е даден со $E_p = mgh$. Користи $g = 10$ метри во секунда на квадрат.

2. Дадена е равенката $2x + 3y = 3$. Најди го решението за кое:
   а) $x = 3$ б) $y = -1$ в) $x = 0$ г) $y = 0$

3. Со помош на еквивалентни трансформации доведи ја до општ вид равенката:
   а) $3(x-2)-2(y-5)=x-y$ б) $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=3$ в) $\frac{x+y}{3}-\frac{y}{2}=5x-y$

4. Запиши го множеството решенија на линеарната равенка:
   а) $3x+7y=41$ б) $\frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{5}-1=0$ в) $2\left(\frac{x}{4}-3\right)+3y+2=2x+3(y-4)$

5. Во множеството решенија на линеарната равенка $3(x-y)+2=x-5y+1$ најди го она решение за кое $x=2y$.

6. Нацртај го графикот на линеарната равенка:
   а) $3x-2y=-12$ б) $3\left(\frac{x+1}{3}-4y\right)+6=3x$ в) $2x=0$ г) $-5y=0$

7. За која вредност на параметарот b графикот на линеарната равенка $2x+by=5$ минува низ точката $A(-1, 3)$?

8. Една диета допушта консумирање на два вида продукти во оброк. Една единица од првиот оброк содржи 80 милиграми витамин Ц, а една единица од вториот оброк содржи 160 милиграми витамин Ц. Дневната потреба од витамин Ц е 960 милиграми.
   а) Колку единици од првиот продукт треба да се консумираат во оброк што содржи 30 единици од вториот продукт?
   б) Колку единици од вториот продукт треба да се консумираат, ако во оброкот се исклучи првиот продукт?

9. Доведи го во општ вид системот од две линеарни равенки со две непознати:
   а) $\begin{cases}3(x-2y)=6y\\x+y=3\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{x+y}{3}+x=15\\y-\frac{y-x}{3}=\frac{6}{5}\end{cases}$ в) $\begin{cases}\frac{x+7}{5}-\frac{2x-y}{4}=3y-5\\\frac{4x-3}{6}+\frac{5y-7}{2}=18-5x\end{cases}$

3.10. Методи за решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати

Графички метод

АКТИВНОСТ

Нацртај го графикот на линеарната равенка со две непознати:
а) $x-4y=8$ б) $2(x-y)=2x-2y$ в) $5(x+y)=10+5x$

За даден систем од две линеарни равенки со две непознати, нека p е графикот на првата, а q графикот на втората равенка. Ако подредениот пар реални броеви (m, n) е решение на системот, тогаш парот (m, n) е решение на двете равенки, што значи точката со координати (m, n) ќе припаѓа на двата графика p и q. Ако графиците p и q се прави, тогаш во зависност од односот на тие прави имаме:

1°. Ако правите се сечат, тогаш системот од две линеарни равенки со две непознати **има единствено решение** (системот е определен).

2°. Ако правите немаат заедничка точка, тогаш системот од две линеарни равенки со две непознати **нема решение** (системот е противречен).

3°. Ако правите се совпаѓаат, тогаш системот од две линеарни равенки со две непознати има **бесконечно многу решенија** (системот е неопределен).

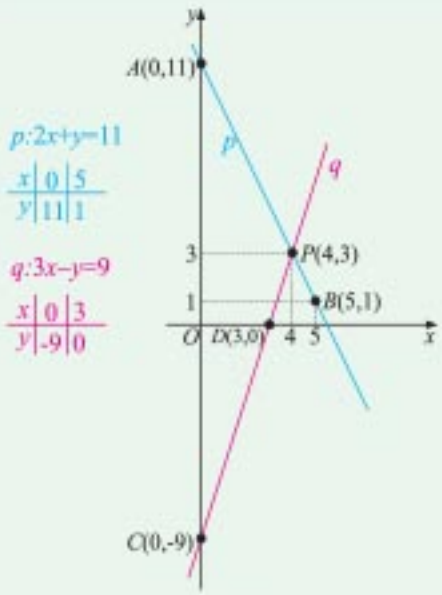
Да се реши систем од две линеарни равенки со две непознати со **графички метод**, значи да се нацртаат графиците на двете линеарни равенки во еден ист координатен систем и да се разгледа нивниот заемен однос.

ПРИМЕР 1

Реши го системот со графички метод:

а) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 3y = 9 \end{cases}$

а)



$p: 2x+y=11$

x	0	5
y	11	1

$q: 3x-y=9$

x	0	3
y	-9	0

Цртеж 1

Графикот на првата равенка е правата p и таа минува низ точките $A(0, 11)$ и $B(5, 1)$.

Графикот на втората равенка е правата q и таа минува низ точките $C(0, -9)$ и $D(3, 0)$.

Правите p и q се сечат во точката $P(4,3)$.

Подредениот пар (4,3) е единственото решение на системот (цртеж 1).

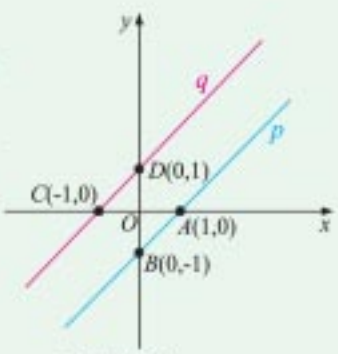
б)

$p: x-y=1$

x	0	1
y	-1	0

$q: x-y=-1$

x	0	-1
y	1	0



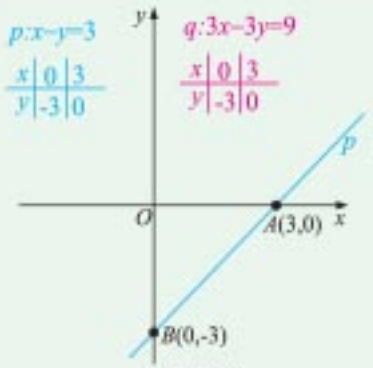
Цртеж 2

Графикот на првата равенка е правата p и таа минува низ точките $A(1, 0)$ и $B(0, -1)$.

Графикот на втората равенка е правата q и таа минува низ точките $C(-1, 0)$ и $D(0, 1)$.

Правите p и q се паралелни и различни. Системот нема решение (цртеж 2).

в)



Цртеж 3

Графикот на првата равенка е правата p и таа минува низ точките $A(3, 0)$ и $B(0, -3)$.

Графикот на втората равенка е правата q и таа минува низ истите точки $A(3, 0)$ и $B(0, -3)$.

Правите p и q се совпаѓаат.

Системот има бесконечно многу решенија (цртеж 3).

ЗАДАЧА 1

Графички реши го системот:

а) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+3y=3 \end{cases}$

ИСТРАЖУВАЊЕ

Истражи и откриј кога системот:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

има единствено решение, има бесконечно многу решенија или е противречен:

1. Ако $b_1=0$ или $b_2=0$. 2. Ако $a_1=0$ или $a_2=0$. 3. Ако $a_1=0$ и $b_2=0$ или $a_2=0$ и $b_1=0$

4. Ако $b_1\neq 0$ и $b_2\neq 0$, и важи условот:

а) $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$ б) $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}$ в) $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{c_1}{b_1}\neq\frac{c_2}{b_2}$.

Метод на замена

АКТИВНОСТ

Реши го системот од две линеарни равенки со две непознати:

а) $\begin{cases} x=2 \\ x+y=3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3(x+2)-7=0 \\ y=3 \end{cases}$ в) $\begin{cases} y+4=0 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

Ако од едната равенка на системот ја изразиме едната непозната преку другата, а потоа со добиениот израз ја замениме таа непозната во втората равенка, тогаш новодобиената равенка и првата равенка на системот образуваат нов систем кој е еквивалентен на даденият.

Оваа постапка за решавање на систем линеарни равенки со две непознати е позната под името **метод на замена**. За примена на овој метод потребно е системот да се доведе во општ вид.

ПРИМЕР 2

Со метод на замена реши го системот:

а) $\begin{cases} 3x-2y=-9 \\ x-y=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{5x-4}{3}+\frac{3y+1}{4}=x+y \\ \frac{7x-2}{6}-\frac{8y+1}{9}=x-y \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$

а) $\begin{cases} 3x-2y=-9 \\ x-y=2 \end{cases}$ Ја решаваме втората равенка по x.

$\begin{cases} 3x-2y=-9 \\ x=2+y \end{cases}$ Добиениот израз за x го заменуваме во првата равенка.

$\begin{cases} 3(2+y)-2y=-9 \\ x=2+y \end{cases}$ Ја поедноставуваме првата равенка со еквивалентни трансформации.

$\begin{cases} y=-15 \\ x=2+y \end{cases}$ Добиената вредност за y ја заменуваме во втората равенка.

$\begin{cases} y=-15 \\ x=-13 \end{cases}$ Системот има единствено решение $(-13, -15)$.

б) $\begin{cases} \frac{5x-4}{3}+\frac{3y+1}{4}=x+y \\ \frac{7x-2}{6}-\frac{8y+1}{9}=x-y \end{cases}$ Со низа трансформации го доведуваме системот во општ вид.

$\begin{cases} 8x-3y=13 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ Ја решаваме втората равенка по y.

$\begin{cases} 8x-3y=13 \\ y=\frac{8-3x}{2} \end{cases}$ Добиениот израз за y го заменуваме во првата равенка.

$\begin{cases} 8x-3\cdot\frac{8-3x}{2}=13 \\ y=\frac{8-3x}{2} \end{cases}$ Применуваме еквивалентни трансформации на првата равенка.

$\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{8-3x}{2} \end{cases}$ Добиената вредност за x ја заменуваме во втората равенка.

$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ Системот има единствено решение $(2, 1)$.

в) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ Ја решаваме првата равенка по y.

$\begin{cases} y=3-x \\ 2x+2y=5 \end{cases}$ Добиениот израз за y го заменуваме во втората равенка.

$\begin{cases} y=3-x \\ 2x+2(3-x)=5 \end{cases}$ Применуваме еквивалентни трансформации на втората равенка.

$\begin{cases} y=3-x \\ 0\cdot x=-1 \end{cases}$ Равенката $0\cdot x=-1$ нема решение. Системот нема решение.

ЗАДАЧА 2

Со метод на замена реши го системот:

а) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 6x-2y=4 \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+x=15 \\ y-\frac{y-x}{5}=\frac{6}{5} \end{cases}$

Метод на спротивни коефициенти

Ако во еден систем ја собереме или одземеме левата страна од едната со левата страна од другата и десната страна од едната со десната страна од другата равенка, ќе добиеме нова равенка, која заедно со една од дадените равенки образува нов систем од две линеарни равенки со две непознати, еквивалентен на даденият. Оваа постапка е позната како **метод на спротивни коефициенти** и се применува откако системот ќе се доведе во општ вид.

ПРИМЕР 3

Со метод на спротивни коефициенти реши го системот:

а) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y=9 \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+1)(y-1)-2x=x(y-1) \\ 3xy+10(x+4)=3y(x+4) \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-2y=m \\ x+my=2 \end{cases}$, m е реален параметар.

а) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y=9 \end{cases}$

Ја собираме левата страна од првата равенка со левата страна од втората равенка и десната страна од првата равенка со десната страна од втората равенка.

Добиената равенка заедно со првата равенка образува нов систем еквивалентен на даденият.

$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y+(2x+y)=9+1 \end{cases}$

Ја поедноставуваме втората равенка со еквивалентни трансформации.

$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 5x=10 \end{cases}$

Решението на равенката $5x=10$ го заменуваме во првата равенка.

$\begin{cases} 2\cdot 2+y=1 \\ x=2 \end{cases}$

Ја пресметуваме вредноста на непознатата y.

$\begin{cases} y=-3 \\ x=2 \end{cases}$

Системот има единствено решение $(2, -3)$.

б) $\begin{cases} (x+1)(y-1)-2x=x(y-1) \\ 3xy+10(x+4)=3y(x+4) \end{cases}$

Го доведуваме системот во општ вид.

$\begin{cases} -2x+y=1 \\ 5x-6y=-20 \end{cases}$

Двете страни на првата равенка ги множиме со бројот 6. Левата страна од добиената равенка ја собираме со левата страна од втората равенка и десната страна од таа равенка со десната страна од втората равенка.

Добиената равенка заедно со првата равенка образува нов систем еквивалентен на даденият.

$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ 5x - 6y + 6(-2x + y) = -20 + 6 \end{cases}$

Ја поедноставуваме втората равенка со еквивалентни трансформации.

$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ -7x = -14 \end{cases}$

Решението на равенката $-7x = -14$ го заменуваме во првата равенка.

$\begin{cases} -2 \cdot 2 + y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Ја пресметуваме вредноста на непознатата y.

$\begin{cases} y = 5 \\ x = 2 \end{cases}$

Системот има единствено решение (2, 5).

в) $\begin{cases} x - 2y = m \\ x + my = 2 \end{cases}$

Ја одземаме левата страна од првата равенка од левата страна на втората равенка и десната страна од првата равенка од десната страна од втората равенка.

Добиената равенка заедно со првата равенка образува нов систем еквивалентен на даденият.

$\begin{cases} x - 2y = m \\ x + my - (x - 2y) = 2 - m \end{cases}$

Ја поедноставуваме втората равенка со еквивалентни трансформации.

$\begin{cases} x - 2y = m \\ (2 + m)y = 2 - m \end{cases}$

Започнуваме дискусија по реалниот параметар m.

- Ако $m = -2$, тогаш втората равенка на системот е од обликот $0 \cdot y = 4$, па системот е противречен.
- Ако $m \neq -2$, тогаш системот добива облик $\begin{cases} x - 2y = m \\ y = \frac{2 - m}{2 + m} \end{cases}$.

Решението на последниот систем е $x = \frac{m^2 + 4}{m + 2}$ и $y = \frac{2 - m}{2 + m}$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

Реши го графички системот од две линеарни равенки со две непознати:

1. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 2x = y + 3 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} y = 0 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$

Реши го со методот на замена системот од две линеарни равенки со две непознати:

7. $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ x - y = 8 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 5x + 2y = 16 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} 3x = 2y - 9 \\ x = 2 + y \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3(x + 2y) = 4(y - x) + 2 \\ 5(x + y) = 3(y - 2x) + 2 \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} \frac{x + y}{3} + x = 15 \\ y - \frac{y - x}{5} = \frac{6}{5} \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} 3x + y = a \\ x - 3y = b \end{cases}$, a и b се реални параметри

Реши го со методот на спротивни коефициенти системот од две линеарни равенки со две непознати:

13. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x = y \\ 2y = 10 - 3x \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y = -2 \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y+4}{5} = 0 \\ \frac{x+1}{4} = \frac{x+2}{3} \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} ax + by = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$, a и b се реални параметри

19. За која вредност на параметарот m системот:

а) $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ -4x + 2y = 5 \end{cases}$ е противречен б) $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x - my = 2 \end{cases}$ е определен

в) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + my = m + 2 \end{cases}$ е неопределен

3.11. Примена на систем од две линеарни равенки со две непознати во проблемски ситуации

АКТИВНОСТ

Компанија се претплатила за x стандардни лиценци за софтвер и y премиум лиценци за софтвер. Стандардната лиценца чини 120 денари месечно, додека премиум лиценцата чини 200 денари месечно. Компанијата се претплатила за 15 лиценци за 2 280 денари месечно.

Состави систем од две равенки со две непознати, според кој ќе можеш да го најдеш бројот на стандардни лиценци за софтвер и премиум лиценци за софтвер за кои се претплатила компанијата.

Голем број на проблеми од секојдневието, техниката и науката воопшто, се сведуваат на решавање равенки и системи равенки.

ПРИМЕР 1

Тревна парцела во форма на правоаголник има периметар 40 метри. Најди ги должината и ширината на парцелата, ако нејзината должина е за 4 метри поголема од ширината.

Нека парцелата е долга x метри и широка y метри.

Од првиот услов во задачата, периметарот на правоаголникот изнесува 40 метри, ја добиваме равенката $2x + 2y = 40$. Од вториот услов во задачата, должината на парцелата е за 4 метри поголема од ширината, ја добиваме равенката $x - 4 = y$. Така, го добиваме системот $\begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ x - 4 = y \end{cases}$

чие решение е $x = 12$ и $y = 8$. Тревната парцела е долга 12 метри, а широка 8 метри.

Проверка: $\begin{cases} 2 \cdot 12 + 2 \cdot 8 = 40 \\ 12 - 4 = 8 \end{cases}$

ПРИМЕР 2

На еден тест по математика имало 10 задачи. За секоја точно решена задача се добиваат 3 бода, а за секоја неточно решена задача се одземаат 2 бода.
Колку задачи точно решил ученик кој освоил 15 бода и ги решавал сите задачи?

Нека x е бројот на точно решени задачи и нека y е бројот на погрешно решени задачи.

Од првиот услов дека ученикот освоил 15 бода ја добиваме равенката $3x - 2y = 15$.

Од вториот услов дека на тестот имало 10 задачи и ученикот ги решавал сите, ја добиваме равенката $x + y = 10$.

На тој начин го добиваме системот $\begin{cases} 3x - 2y = 15 \\ x + y = 10 \end{cases}$, чие решение е $x = 7$ и $y = 3$. Ученикот точно решил 7 задачи.

Проверка: $\begin{cases} 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 15 \\ 7 + 3 = 10 \end{cases}$

ПРИМЕР 3

Два сада кои собираат 100 литри и 144 литри течност, содржат одредено количество течност. Ако течноста од помалиот сад ја претуриме во поголемиот и го дополниме, тогаш во помалиот сад ќе преостане $\frac{1}{5}$ од првобитното количество течност. Ако, пак, течноста од поголемиот сад ја претуриме во помалиот сад и го дополниме, тогаш во поголемиот сад ќе преостанат $\frac{7}{12}$ од првобитното количество. Колку течност имало во садовите пред претурањето?

Нека x е количеството течност во помалиот сад пред претурањето и y е количеството течност во поголемиот сад.

Според условите во задачата доаѓаме до системот $\begin{cases} \frac{4}{5}x + y = 144 \\ x + \frac{5}{12}y = 100 \end{cases}$

чие решение е $x = 60$ и $y = 96$. Пред претурањето во помалиот сад имало 60 литри течност, а во поголемиот сад имало 96 литри течност.

Проверка: $\begin{cases} \frac{4}{5} \cdot 60 + 96 = 144 \\ 60 + \frac{5}{12} \cdot 96 = 100 \end{cases}$

ПРИМЕР 4

Адмир вложил сума од 12 000 денари во две различни банки, со годишна каматна стапка од 9% во првата и 11% во втората банка. Ако за една година добил камата од 1180 денари, по колку пари вложил во секоја банка?

Нека во првата банка вложил x денари, а во втората банка y денари, тогаш од условите во задачата доаѓаме до системот $\begin{cases} x + y = 12\,000 \\ 0{,}09x + 0{,}11y = 1180 \end{cases}$, чие решение е $x = 7000$ и $y = 5000$.

Адмир вложил 7000 денари во првата банка и 5000 денари во втората банка.

Проверка: $\begin{cases} 7000 + 5000 = 12\,000 \\ 0{,}09 \cdot 7000 + 0{,}11 \cdot 5000 = 1180 \end{cases}$

ПРИМЕР 5

Еден велосипедист го поминува растојанието меѓу два града за определено време, кога се движи со постојана брзина. Ако тој ја зголеми брзината за 5 километри на час, ќе стигне за 1 час порано, а ако ја намали брзината за 3 километри на час, ќе стигне за 1 час подоцна. Најди ја брзината на велосипедистот, времето за кое велосипедистот го поминал растојанието меѓу градовите и растојанието меѓу градовите.

Нека велосипедистот се движел со брзина од x километри на час и нека растојанието меѓу градовите го поминал за y часа. Во тој случај со брзина од x километри на час за y часа ќе помине xy километри пат, а со брзина од $(x+5)$ километри на час за $(y-1)$ часа ќе помине $(x+5)(y-1)$ километри пат. Бидејќи изминатиот пат во двата случаи е еднаков на растојанието меѓу градовите, ја добиваме равенката $(x+5)(y-1)=xy$.

Размислувајќи на ист начин ја добиваме равенката $(x-3)(y+1)=xy$.

На тој начин доаѓаме до системот $\begin{cases}(x+5)(y-1)=xy\\(x-3)(y+1)=xy\end{cases}$

чие решение е $x=15$ и $y=4$. Брзината на велосипедистот е 15 километри на час, времето за кое го поминува растојанието меѓу градовите е 4 часа, а растојанието меѓу градовите е $15\cdot 4=60$ километри.

Проверка: $\begin{cases}(15+5)(4-1)=15\cdot 4\\(15-3)(4+1)=15\cdot 4\end{cases}$

ЗАДАЧА 1

Вселенски брод користи два вида гориво, главно гориво и резервно гориво. Секоја единица главно гориво овозможува патување од 5 километри. Секоја единица резервно гориво овозможува патување од 3 километри. По користењето на вкупно 20 единици гориво, бродот патувал 80 километри. Колку единици од секое гориво искористил вселенскиот брод?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Должината на еден правоаголник е двапати поголема од неговата ширина. Колкава е должината и ширината на правоаголникот, ако неговиот периметар изнесува 72 центиметри?

2. Поголемиот од два суплементарни агли е за 4 поголем од трипати помалиот агол. Најди ги аглите.

3. Поголемиот остар агол во правоаголен триаголник е 15 степени помал од двапати помалиот остар агол. Најди ги острите агли во правоаголниот триаголник.

4. Марко сака да се вработи како продавач. Првата компанија му нуди плата од 800 денари дневно и 10 денари од еден продаден артикл. Втората компанија му нуди 1000 денари дневно и 8 денари од еден продаден артикл. Колку артикли треба да продаде Марко за платата од двете компании да биде идентична?

5. Двата котли за нафта за загревање на училиштето собираат 500 литри нафта. Поголемиот котел собира 120 литри нафта повеќе од помалиот котел. Колку литри нафта собира секој од котлите?

6. Рина секој ден трча и вози велосипед. Првиот ден трчала 10 минути и возела велосипед 20 минути со што потрошила 300 калории. Вториот ден решила да ги замени времињата и

трчала 20 минути и возела велосипед 10 минути и повторно потрошила 300 калории. Колку калории по минута согорува Рина со трчање, а колку со возење велосипед?

7. Училишниот секретар Петар треба да купи канцелариски материјал. Минатата недела купил 3 пакети хартија и 4 пакети спојувалки за 2000 денари. Оваа недела купил 5 пакети хартија и 2 пакети спојувалки за 3100 денари. Колку чини еден пакет хартија, а колку чини еден пакет спојувалки?

8. Вкупното количество сол во два сендвичи и три парчиња кашкавал е 4720 милиграми. Во пет сендвичи и две парчиња кашкавал има 6300 милиграми сол. Колку сол има во еден сендвич, а колку има во едно парче кашкавал?

9. Патувањето со моторен чамец на растојание од 18 километри трае 2 часа по течението на реката и 4 часа и 30 минути спротивно од течението на реката. Која е брзината на моторниот чамец во мирна вода, а која е брзината на реката?

10. Група ученици решиле да соберат средства и да купат одреден број на садници. Ако секој од нив даде по 150 денари, тогаш им недостигаат уште 170 денари, а ако секој даде по 180 денари ќе имаат вишок од 100 денари. Колку ученици има во групата и колку пари се потребни за садниците?

3.12. Видови неравенки и еквивалентни неравенки со една непозната

Видови неравенки

АКТИВНОСТ

Состави по едно бројно неравенство со употреба на знаците за неравенство дадени во табелата:

помало	поголемо	помало или еднакво	поголемо или еднакво
$<$	$>$	$\leq$	$\geq$

Два алгебарски рационални изрази, од кои барем еден израз има една или повеќе променливи, сврзани со знак за неравенство определуваат **неравенка**.
Променливите во неравенката ги нарекуваме **непознати** и ги означуваме со $x, y, z, \ldots$
Множеството допуштени вредности на непознатите се вика **дефиниционо множество** на неравенката и се означува со D.

ПРИМЕР 1

Неравенката $5x + 3 > 2$ е неравенка по непознатата x и има дефиниционо множество $D = \mathbb{R}$.

Според бројот на непознати, неравенката може да биде: **неравенка со една непозната, неравенка со две непознати** итн.
Според најголемиот степен со кој се степенуваат непознатите, неравенката може да биде **неравенка од прв степен или линеарна, неравенка од втор степен или квадратна** итн.

ПРИМЕР 2

а) Неравенката $2x + 4 < 7$ е линеарна неравенка со една непозната.
б) Неравенката $x + y \geq 2x$ е линеарна неравенка со две непознати.
в) Неравенката $x^2 \leq x + y$ е квадратна неравенка со две непознати.

ПРИМЕР 3

Неравенката $7 - 3x \geq 1$, за $x = 2$ преминува во точно бројно неравенство $7 - 3 \cdot 2 \geq 1$
за $x = 3$ преминува во неточно бројно неравенство $7 - 3 \cdot 3 \geq 1$

Решение на неравенка со една непозната е секоја вредност на непознатата од дефиниционото множество за која неравенката преминува во точно бројно неравенство. Сите решенија на една неравенка го сочинуваат **множеството решенија на неравенката**, кое ќе го означуваме со R.

ПРИМЕР 4

а) Решение на неравенката $x > 5$ е секој реален број од отворениот интервал $(5, +\infty)$, односно $R = (5, +\infty)$.
б) За неравенката $6 + 3x \geq 3(2 + x)$ множеството решенија $R = D = \mathbb{R}$. Во ваков случај велиме дека неравенката е идентитет.
в) За неравенката $7 + 3x < 2 + 3x$ множеството решенија $R = \emptyset$. Во ваков случај велиме дека неравенката е **невозможна**.

Еквивалентни неравенки со една непозната

АКТИВНОСТ

Што може да заклучиш за дефиниционото множество и множеството решенија на неравенките:
$2 + x < 5$ и $x - 3 < 0$?

Две неравенки кои имаат исто дефиниционо множество и исто множество решенија се нарекуваат **еквивалентни неравенки.**

За да решиме дадена неравенка, истата ја заменуваме со друга поедноставна, но еквивалентна на неа. Потоа, таа неравенка ја заменуваме со трета поедноставна еквивалентна на неа, итн., сè додека не дојдеме до неравенка чии решенија се очигледни. Постапката на замена на неравенка со неравенка еквивалентна на неа се нарекува **еквивалентна трансформација.**

АКТИВНОСТ

Проследи ја замената на дадената неравенка со поедноставна равенка која е еквивалентна на неа, и чие решение е очигледно:

$x-5<2$	Кон двете страни на равенката го додаваме бројот 5.
$x-5+5<2+5$	Ги извршуваме назначените операции на двете страни од неравенката.
$x<7$	Добиената неравенка е еквивалентна на дадената неравенка.

Дали до истото решение ќе дојдеш ако бројот – 5 го пренесеш на другата страна, со спротивен знак?

Ако кон двете страни на неравенката додадеме еден ист израз, кој е дефиниран за сите допуштени вредности на непознатата, ќе добиеме неравенка еквивалентна на дадената.

Како последица имаме дека:

- Ако двете страни на неравенката имаат еднакви членови со исти знаци, тие може да се поништат (изостават).
- Секој член на неравенката може да се пренесе од едната страна на неравенката на другата страна и притоа неговиот знак се менува во спротивен.

ПРИМЕР 1

Проследи ги еквивалентните трансформации на неравенката:

а) $5x-3x+3\geq 8-3x$	Ги поништуваме еднаквите членови: $-3x$ и $-3x$.
$5x+3\geq 8$	Добиената неравенка е еквивалентна на дадената.
б) $4x-5<3x+2$	Членот $3x$ го пренесуваме на левата страна на неравенката, неговиот знак ќе се промени во спротивен.
$4x-5-3x<2$	Членот -5 го пренесуваме на десната страна од неравенката, неговиот знак ќе се промени во спротивен.
$4x-3x<5+2$	Добиената неравенка е еквивалентна на дадената равенка.

Ако двете страни на неравенката ги помножиме со еден ист израз, кој е дефиниран и добива само позитивни вредности за сите допуштени вредности на непознатата, ќе добиеме неравенка еквивалентна на дадената.

Како последица, ако двете страни на неравенката имаат заеднички позитивен множител, тогаш со него може да се поделат двете страни на неравенката. Во тој случај велиме дека **неравенката ја скратуваме.**

ПРИМЕР 2

Проследи ги еквивалентните трансформации на неравенката $3(x-2)<15$.

$3(x-2)<15$	Двете страни на неравенката ги делиме со бројот 3.
$x-2<5$	Добиената неравенка е еквивалентна на дадената.

Да забележиме дека со примена на погорното својство, неравенка со дробни коефициенти може да се трансформира во неравенка со цели коефициенти, ако секој член на неравенката се помножи со позитивен заеднички содржател на именителите. Ваквата трансформација се нарекува **ослободување на неравенката од именители**.

ПРИМЕР 3

Ослободи ја од именители неравенката $\frac{2x-7}{3}<\frac{x+1}{2}-5$.

$\frac{2x-7}{3}<\frac{x+1}{2}-5$	Секој член го множиме со НЗС на именителите: НЗС(2, 3) = 6.
$6\cdot\frac{2x-7}{3}<6\cdot\frac{x+1}{2}-6\cdot 5$	Скратуваме.
$2(2x-7)<3(x+1)-30$	Добиената неравенка е еквивалентна на дадената неравенка.

ЗАДАЧА 1

Ослободи ја од именители неравенката $\frac{x-5}{2}-3>\frac{3x-2}{6}$.



Ако двете страни на равенката ги помножиме со еден ист израз, кој за сите допуштени вредности на непознатата е дефиниран и добива само негативни вредности, и ако ја промениме насоката на неравенството ($<$ со $>$, $>$ со $<$, $\leq$ со $\geq$, $\geq$ со $\leq$) ќе добиеме неравенка еквивалентна на дадената.

Како последица од погорното својство имаме дека ако двете страни на дадена неравенка ги помножиме со -1, насоката на неравенката се менува во спротивна.

ПРИМЕР 5

$-x>7$	Двете страни на неравенката ги множиме со -1.
$x<-7$	Насоката на неравенката е променета во спротивна.

Од последните две својства следува заклучокот дека ако двете страни на дадена неравенка се помножат со определен израз, тогаш треба да се разгледаат случаите кога тој израз е позитивен, кога е негативен, а кога е нула.

Во случај кога изразот е 0, имај во предвид дека $0\geq 0$ и $0\leq 0$ се точни неравенства, а $0>0$ и $0<0$ се неточни неравенства.

ЗАДАЧА 2

Висината на телефонската претплата изнесува $350 + 20x$ денари, каде x е бројот на воспоставени повици. Колку повици најмногу можат да се воспостават за висината на телефонската сметка да не надмине вредноста од 1000 денари?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Дали следниве неравенки се еквивалентни:

   а) $x - 4x > 10 + 4x$ и $x > 10$ б) $3x^2 + 3x > 12 + 3x^2$ и $3x > 12$ в) $x + \frac{1}{x} \leq 5 + \frac{1}{x}$ и $x \leq 5$

2. Кои од следниве неравенки се идентитети:

   а) $5x^2 - 2x^2 \geq x^2$ б) $3x - 2 < 3x + 1$ в) $(y + 5)^2 \geq y^2 + 10y + 5$

3. Кои од следниве неравенки се невозможни:

   а) $5 - 4x > 10 - 4x$ б) $2(x - 3) + 2 < 2x + 6$ в) $\frac{4x - 1}{2} > \frac{6x + 2}{3}$

4. Откриј ги грешките што ги направил Сеад при извршување на еквивалентните трансформации на неравенката:

   а) $5(x - 2) + 3(x + 4) \geq 2(x - 1) + 8$
   $5x - 10 + 3x + 12 \geq 2x - 2 + 8$
   $8x + 2 \geq 2x + 6$
   $10x \geq 8$
   $x \geq \frac{4}{5}$

   б) $5(2 - 3x) \leq 2(x + 4) - 3(x - 1)$
   $10 - 15x \leq 2x + 8 - 3x + 3$
   $-15x - 2x + 3x \leq 8 + 3 - 10$
   $-14x \leq 1$
   $x \leq -\frac{1}{14}$

5. Еден сервер добива $8x$ барања на час, каде x е бројот на корисници. Колку најмногу корисници може да има серверот, ако тој може да обработува најмногу 5000 барања на час?

3.13. Составување и решавање на линеарни неравенки со една непозната

Решавање на линеарни неравенки со една непозната

АКТИВНОСТ

Со примена на еквивалентни трансформации на неравенката $5x + 4 > 8 + 2x$ пренеси ги сите членови на левата страна и сведи ги. Потоа опиши го обликот на добиената неравенка.

Со сите погорни трансформации секоја линеарна неравенка со една непозната се сведува на линеарна неравенка од видот

$ax + b > 0$ (или $ax + b \geq 0$)

наречен **општ вид на линеарна неравенка со една непозната**, каде што a се вика **коефициент** пред непознатата, а b се вика **слободен член**.

АКТИВНОСТ

Најди го множеството решенија на линеарната неравенка:

а) $2x+4<0$ б) $0\cdot x\le 2$ в) $0\cdot x\ge 0$.

Да го испитаме множеството решенија на линеарната неравенка

1⁰. $ax+b>0$ (или $ax+b\ge 0$) и $a>0$.

$x>-\frac{b}{a}$ (или $x\ge -\frac{b}{a}$)

Го пренесуваме b на десната страна на неравенката, а потоа делиме со a.

Добиената неравенка е еквивалентна на дадената.

Множеството решенија е интервал затворен од лево $\left(-\frac{b}{a},\infty\right)$ (или $\left[-\frac{b}{a},\infty\right)$).

2⁰. $ax+b>0$ (или $ax+b\ge 0$) и $a<0$

$x<-\frac{b}{a}$ (или $x\le -\frac{b}{a}$)

Го пренесуваме b на десната страна на неравенката, а потоа делиме со a.

Добиената неравенка е еквивалентна на дадената неравенка.

Множеството решенија е интервалот $\left(-\infty,\frac{-b}{a}\right)$ (или $\left(-\infty,\frac{-b}{a}\right]$).

3⁰. $ax+b>0$ (или $ax+b\ge 0$) и $a=0$

$0\cdot x+b>0$ (или $0\cdot x+b\ge 0$)

Заменуваме $a=0$.

Добиената неравенка е еквивалентна на дадената неравенка.

Ако $b>0$ (или $b\ge 0$) неравенката е **идентитет**.

Ако $b\le 0$ (или $b<0$) неравенката е **невозможна**.

ПРИМЕР 1

Реши ја неравенката $\frac{x-3}{3}-1>\frac{x-1}{2}-2$.

$\frac{x-3}{3}-1>\frac{x-1}{2}-2$ — Двете страни на неравенката ги множиме со НЗС $(2,3)=6$.

$6\cdot\frac{x-3}{3}-6\cdot 1>6\cdot\frac{x-1}{2}-6\cdot 2$ — Скратуваме.

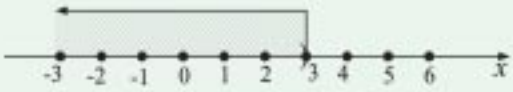
$2(x-3)-6>3(x-1)-12$.
$2x-6-6>3x-3-12$ — Се ослободуваме од заградите. Ги групираме сите членови што ја содржат непознатата на левата страна, а сите слободни членови на десната страна.

$2x-3x>-3-12+6+6$ — Ги сведуваме сличните членови.

$-x>-3$ — Ги множиме двете страни со бројот -1.

$x<3$ — Множеството решенија е интервалот $(-\infty,3)$.

Множеството решенија може графички да го претставиме на бројната оска, така што делот од бројната оска на кој лежат точките кои соодветствуваат на решенијата на неравенката го прецртуваме (цртеж 1).



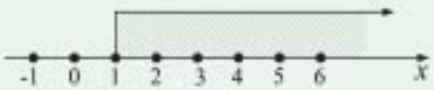
Цртеж 1

ПРИМЕР 2

Реши ја неравенката $(x-2)^2 - 3x \leq x(x-3)$

$x^2 - 4x + 4 - 3x \leq x^2 - 3x$	Степенуваме и се ослободуваме од заградите. Ги групираме членовите со и без непознатата и ги сведуваме сличните членови.
$-4x \leq -4$	Двете страни на неравенката ги делиме со -4.
$x \geq 1$	Множеството решенија е интервалот $[1, +\infty)$.

Множеството решенија на неравенката е графички претставено на цртеж 2.



Цртеж 2

ЗАДАЧА 1

Распореди ги неравенките во правилен редослед за да добиеш точно решение на почетната неравенка. Некои неравенки не се точни. Открij ги грешките кои се направени при решавањето за да се добијат неточните неравенки.

$2x > 3$ $x > 1{,}5$	$2x > -15$ $x < 6$	$3(5x-3) > 13x-6$ $15x-9 > 13x-6$	$15x-6 > 13x-6$ $2x-9 > -6$

ЗАДАЧА 2

Моника има 300 денари и сака да купи производи со вкупната сума од $15x + 30$ денари, каде што x е бројот на купени продукти.
Колку најмногу производи купила Моника?

ПРИМЕР 3

Реши ја неравенката $mx - 5 > 3x - m$, каде m е реален параметар.

$mx - 5 > 3x - m$	Ги групираме сите членови што ја содржат непознатата на левата страна, а слободните членови на десната страна.
$mx - 3x > 5 - m$	Добиената неравенка е еквивалентна на дадената.
$(m-3)x > 5 - m$	Започнуваме дискусија по вредностите на параметарот m:

Ако $m-3>0$, односно $m>3$, тогаш множеството решенија е интервалот $\left(\frac{5-m}{m-3}, +\infty\right)$.

Ако $m-3<0$, односно $m<3$, тогаш множеството решенија е интервалот $\left(-\infty, \frac{5-m}{m-3}\right)$.

✓ Ако $m-3=0$, односно $m=3$, тогаш неравенката добива облик $0 \cdot x > 2$.

Во овој случај равенката е невозможна и множеството решенија е празно множество.

ЗАДАЧА 1

Реши ја неравенката со параметар $2x-m<m-2$, каде m е реален параметар.

Примена на линеарни неравенки со една непозната

ПРИМЕР 4

Шпати се спрема за бокс-натпревар и треба да ја намали телесната тежина. Тој треба да согори дополнителни најмалку 2000 калории дневно.
Ако Шпати дневно согорува по 2750 калории, колку калории дневно може да внесува за да ја оствари целта?

Нека x е бројот на калории што треба да ги внесува Шпати дневно. Од условот во задачата ја добиваме неравенката $2\,750-x \geq 2000$, која е еквивалентна на неравенката $x \leq 750$.

Шпати треба да внесува најмногу 750 калории дневно.

Проверка: $2\,750-750 \geq 2\,000$

ПРИМЕР 5

Ирина сака да го пребои креветчето на Мила. За таа цел треба да пребои 180 квадратни дециметри.
Ако со една кутија боја може да се пребои површина од 50 квадратни дециметри, колку најмалку кутии боја треба да купи Ирина?

Нека x е бројот на кутии боја што треба да ги купи Ирина. Од условот во задачата ја добиваме неравенката $50x \geq 180$, која е еквивалентна на неравенката $x \geq 3{,}6$.

Решение на поставената задача е најмалиот природен број поголем од 3,6, односно бројот 4.

Ирена треба да купи најмалку 4 кутии боја.

Проверка: $50 \cdot 4 \geq 180$

ПРИМЕР 6

Дрон ја троши својата батерија со брзина од 0,625% во минута. Дронот мора да слета пред да потроши 60% од својата батерија. Колку најмногу минути може да лета дронот?

Нека x е времето изразено во минути за кои дронот може да лета. Од условот во задачата ја добиваме неравенката $0{,}625\%\, x < 60\%$ која е еквивалентна на неравенката $x < 96$.

Решение на поставената задача е најголемиот природен број помал од 96, односно бројот 95.

Дронот може да лета најмногу 95 минути.

Проверка: $0{,}625\% \cdot 95 < 60\%$

ПРИМЕР 7

Голема кутија храна за миленичиња содржи трипати повеќе порции храна од мала кутија храна за миленичиња. Независно каква кутија ќе купи Онур, тој прво одвојува една порција за да изврши контрола на квалитетот на храната. Потоа, храната ја дели на своите две кучиња кои секој ден јадат по една порција храна. Големата кутија обезбедува храна за 5 дена повеќе од удвоениот број на денови од малата кутија.

Колку најмалку порции храна содржи малата кутија?

Нека x е бројот на порции храна во малата кутија. Тогаш $3x$ е бројот на порции храна во големата кутија. Малата кутија обезбедува храна за $\frac{x-1}{2}$ денови, а од големата кутија $\frac{3x-1}{2}$ денови.

Така доаѓаме до линеарната неравенка $\frac{3x-1}{2} > 2 \cdot \frac{x-1}{2} + 5$ која е еквивалентна на неравенката $x > 9$.

Решение на задача е најмалиот природен број поголем од бројот 9, односно бројот 10.

Малата кутија содржи најмалку 10 порции.

Проверка: $\frac{3 \cdot 10 - 1}{2} > 2 \cdot \frac{10-1}{2} + 5$

ЗАДАЧА 1

Пастрмка одгледана во рибник секој месец добива 35 грама на својата маса. Големината на една порција од пастрмка е 300 грама.

Колку најмалку месеци се потребни за една пастрмка да порасне до големина соодветна на една порција?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Претстави го графички множеството решенија на неравенката:
   а) $x \geq 3$ б) $x \leq -4$ в) $x + 7 > 0$ г) $6x < 24$

2. Реши ја неравенката:
   а) $3x - 4 \geq 2 - x$ б) $5 - 2y < y + 8$ в) $x - (2 - x) \leq 3x + 7$

3. Реши ја неравенката:
   а) $(x-3)^2 \leq x(x+1)$ б) $\frac{x-5}{2} - 3 > \frac{3x-2}{6}$ в) $\frac{y}{2} - \frac{1-y}{4} > 5 - \frac{2+y}{3}$

4. Реши ја неравенката:
   а) $2x - 1 < \frac{8-x}{2}$ б) $\frac{4x-3}{2} > \frac{2-x}{3}$ в) $\frac{2}{3}(2z-1) - \frac{2}{5}z \leq 4$

5. Реши ја неравенката со параметар:
   а) $x + 3m \geq 9$, m е реален параметар б) $a^2x < ax - a^2x$, a е реален параметар

6. Растојанието од Земјата до Месечината е 384400 километри. Кинеската сонда Чанг'е 6 во јуни 2024 беше во мисија на собирање на материјал од Месечината. Ако максималната брзина на сондата била 10.5 километри во секунда, колку е најкраткото време за да стигне од Земјата до Месечината?

7. Реакцијата на неутрализација се извршува помеѓу база и киселина. Отстранувањето на опасната киселина во автомобилските акумулатори се врши со помош на натриум хидроксид. Нов автомобилски акумулатор содржи помалку од 600 грама киселина. За целосна неутрализација на 5 грама акумулаторска киселина се потребни 4 грама натриум хидроксид. Колку грама натриум хидроксид се потребни за целосна неутрализација на акумулаторска киселина кај еден акумулатор?

8. Марија отстранува бигор од електрично ѓезве користејќи оцет. Наслагата од бигор е 2 милиметри и покрива дно со површина од 8 000 квадратни милиметри. За отстранување на еден центиметар кубен бигор потребни се 10 мililитри оцет. Колку најмногу мililитри оцет ѝ се потребни на Марија?

9. Филип треба да качи 5 вреќи со лепило, секоја од 25 килограми, на височина од 20 метри. Колку џули е минималната работа што Филип ќе ја изврши за да ги пренесе вреќите? Равенката за извршена работа е $A = F \cdot s$, каде A е извршената работа, $F = m \cdot g$ е тежината на вреќите каде m е масата на вреќата и g е земјината тежа ($g = 10$ метри во секунда на квадрат) и s е поминатиот пат.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Нацртај ја во координатната рамнина точката:

   а) $A(-2, 4)$ б) $B(5, 4)$ в) $C(0,3)$ г) $D(5, 0)$

   д) $E(-6, 0)$ ѓ) $F(-2, -3)$ е) $G(1, -3)$ ж) $H(0, -1)$

   и определи во кој квадрант или на која оска се наоѓаат.

2. Нацртај ги точките $T(0, -2)$, $U(1, 3)$, $V(6, 4)$, $W(5, -1)$ во координатната рамнина и провери дали четириаголникот $TUVW$ е ромб.

3. Триаголникот ABC има темиња

   а) $A(1, 1)$, $B(5, 1)$ и $C(5, 7)$ б) $A(1, 2)$, $B(5, 2)$ и $C(5, 5)$.

   Утврди дали триаголникот ABC е правоаголен, а потоа пресметај го периметарот.

4. Две честички со еднакви маси се наоѓаат во точките (1,3) и (7,9). Најди ги координатите на центарот на масата?

5. Точките $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(5, 5)$ и $D(1, 5)$ се темиња на паралелограм. Пресметај ја плоштината на паралелограмот $A_1B_1C_1D_1$, ако A_1, B_1, C_1 и D_1 се средишни точки на страните AB, BC, CD и DA, соодветно.

6. Ана направи мобилна апликација. Првиот ден апликацијата ја презеле 40 корисници, а секој следен ден апликацијата ја преземаат по 25 нови корисници.

   а) Запиши ја функцијата што го опишува бројот на преземања во зависност од времето.

   б) Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата.

7. Два автомобили се движат од точка А до точка В на растојание од 400 метри. Првиот автомобил се движи рамномерно со брзина од 20 метри во секунда. Вториот автомобил тргнува од мирување од точката А и се движи рамномерно забрзано со забрзување од 2 метри во секунда на квадрат.
   а) Запиши ја функцијата која го определува поминатиот пат на првиот автомобил.
   б) Запиши ја функцијата која го определува поминатиот пат на вториот автомобил.
   в) Нацртај ги графиците на двете функции во ист координатен систем. Што забележуваш?
   г) Колку време ќе му биде потребно на првиот, а колку на вториот автомобил за да го помине патот помеѓу точките А и В?

8. Една радиоактивна супстанца има маса од 100 грама. Секоја година нејзината маса се намалува за 75%.
   а) Најди го количеството на супстанца по 5 години.
   б) Запиши ја функцијата што го моделира количеството на супстанца во однос на времето во години.
   в) Нацртај го графикот на количеството супстанца во однос на времето во години.

Реши ги равенките:

9. а) $7(x-3)=4(x+5)-47$
   б) $16-9(3-u)+4u=15$
   в) $(w-1)(w-2)=(w+3)(w-4)-3(w-1)$

10. а) $\frac{4y-3}{y+2}=\frac{7y-2}{y-5}-3$ б) $\frac{7}{x-1}=\frac{9}{x-2}-\frac{2}{x-3}$ в) $\frac{x}{2}+\frac{3}{4}=2\left(x+\frac{1}{4}\right)$

11. Реши ја равенката со параметар:
   а) $ax-bx=b-ax$ б) $(y-a)(y-b)=y^2-a^2$ в) $\frac{ax-b}{b}-\frac{bx-a}{a}=a-b$

12. Лабораторија има резервоар за вода кој првично содржи 500 литри чиста вода. Секој час, лабораторијата користи 35 литри вода за експерименти. По колку часа во резервоарот ќе останат само 290 литри вода?

13. Три цевки, одделно секоја сама, може да наполнат еден базен за 10, 12 и 15 часа. За колку часа тие ќе го наполнат базенот заедно?

14. Најди ја вредноста на параметарот c на линеарната равенка $2x-7y=c$, така што нејзиниот график да минува низ точката $B(1,-1)$?

15. Со помош на еквивалентни трансформации доведи ја до општ вид равенката $\frac{x+5}{3}-\frac{y+3}{5}-1=0$, а потоа запиши го нејзиното множество решенија.

16. Во множеството решенија на равенката $5(x-y)+2=3x-2y+1$ одреди го она решение за кое $x=2y$.

17. Реши го графички системот од две линеарни равенки со две непознати:
   а) $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x+6y=8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 5x+12y=12 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

18. Реши го со методот на замена системот од две линеарни равенки со две непознати:

а) $\begin{cases}(2x-3):(y+5)=3:4\\(5x-4):(3y+1)=5:2\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=-3\\\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y=-6\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+a=by\\x+b=ay\end{cases}$, a и b се реални параметри

19. Реши го со методот на спротивни коефициенти системот од две линеарни равенки со две непознати:

а) $\begin{cases}\frac{5x-4}{3}+\frac{3y+1}{4}x+y\\\frac{7x-2}{6}+\frac{8y+1}{9}=x-y\end{cases}$ б) $\begin{cases}a(x+y)-b(x-y)=2a^2\\(a^2-b^2)(x-y)=4a^2b\end{cases}$, a и b се реални параметри

20. Аголот при врвот на еден рамнокрак триаголник е четирипати помал од аголот при основата. Пресметај ја големината на аглите во триаголникот.

21. Четворица другари сакаат да купат фудбалска топка. Првиот дал половина од сумата, вториот дал една третина од сумата на останатите тројца, третиот дал една четвртина од сумата на останатите тројца и четвртиот дал 50 денари. Колку денари чини топката?

22. Ако на 8 литри топла вода се додадат 2 литри поладна вода ќе се добие вода на температура од 66 °C, а ако, пак на 7 литри топла вода се додадат 3 литри поладна вода ќе се добие вода на температура од 59 °C. Колкава е температурата на топлата, а колкава на поладната вода?

23. Авион растојанието од Скопје до Милано од 1072 километри го минува со поволен ветер за 4 часа, додека растојанието од Милано до Берлин од 848 километри го минува со спротивен ветер со иста брзина исто така за 4 часа. Најди ја брзината на авионот и брзината на ветерот.

24. Тијана купила две карти за возрасни и три карти за деца за превоз со брод. Платила вкупно 8 800 денари. Блерим купил три карти за возрасни и две карти за деца за превоз со истиот брод. Платил вкупно 9 700 денари. Колку чини карта за превоз на возрасни, а колку за превоз на деца?

25. Реши ги неравенките:

а) $3(x-3)+2<6x-1$ б) $\frac{4x-3}{6}\le\frac{x-1}{2}$ в) $\frac{7x-8}{3}\ge\frac{1-x}{4}$

г) $\frac{x+3}{3}-\frac{3x+1}{2}>0$ д) $\frac{1-x}{2}+\frac{3-x}{4}<2$ ѓ) $2m-3x<mx+4$, m е реален параметар

26. Марко имал 700 денари. Најди го максималниот број на колачи што може да ги купи од слаткарницата, ако цената на еден колач е 55 денари.

27. Мозаикот на фазан од античкиот локалитет Стоби има големина од 160 центиметри должина и 75 центиметри ширина. Ако најголемото парче во мозаикот има плоштина од 3 квадратни центиметри, а најмалото парче има плоштина од 1,5 квадратни центиметри, колку е најмалиот и најголемиот број на парчиња кои ги содржи мозаикот?

28. Паметен телефон има камера со која се прават слики со големина од 48 мегабајти. Телефонот има меморија од 6 гигабајти. Кој е најголемиот број на слики кои може да се зачуваат на телефонот?

Тема 4:

ГЕОМЕТРИЈА

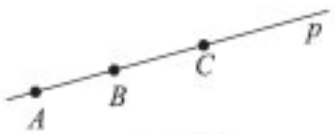
Во изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш:

1. да ги користиш знаењата за да решаваш СТЕМ проблеми;
2. да ги применуваш знаењата за синус, косинус, тангенс и котангенс во решавање проблеми од реален контекст;
3. да ги користиш својствата на 2Д-формите во решавање проблеми;
4. да решаваш задачи од сличност во реални ситуации.

4.1. Вектор. Правец, насока и големина на вектор

На цртеж 1 е дадена правата p во рамнината и три различни точки A, B и C кои лежат на правата. Размисли и одреди кои од следниве тврдења се точни:

а) точката B ја дели правата p на две полуправи
б) полуправите BA и BC имаат спротивна насока
в) полуправите BA и AC имаат спротивна насока
г) полуправите AC и BC имаат иста насока
д) полуправите AB и BC имаат иста насока



Цртеж 1

Да разгледаме две полуправи кои лежат на иста права (т.е. се подмножества од иста права), односно имаат **ист правец**. Ако едната полуправа е подмножество од другата, велиме дека полуправите имаат **иста насока**. Во спротивно ќе велиме дека тие имаат **спротивни насоки**.

ЗАДАЧА 1

Со помош на точките A, B и C од правата p (цртеж 1), како крајни точки, запиши ги сите отсечки кои се добиваат. Одреди го нивниот број.

ЗАДАЧА 2

Со помош на точките A, B и C од правата p (цртеж 1), како крајни точки, запиши ги сите насочени отсечки кои се добиваат. Одреди го нивниот број и спореди го со добиениот број од задача 1.

Под **вектор** ќе подразбираме насочена отсечка, т.е. отсечка кај која едната точка се зема за почетна а другата за крајна. Ако крајните точки на насочената отсечка се точките A и B и насоката е од A кон B, тогаш за соодветниот вектор пишуваме $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (цртеж 2).



Цртеж 2

ЗАДАЧА 3

Дадени се четири различни точки A, B, C и D. Запиши ги сите вектори кои се добиваат со помош на овие точки.

Секој вектор $\overrightarrow{AB}$ е определен со:

- **големина** еднаква на должината на отсечката AB (т.е. $\overline{AB}$),
- **правец** определен со правата AB и
- **насока** од точката A кон точката B (т.е. насоката на полуправата AB).

Големината на векторот уште ќе ја нарекуваме и **должина на векторот** (интензитет или модул на векторот). Ознака: $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

Векторот, кој има должина 1, ќе го нарекуваме **единичен вектор**.
Векторот, кој има должина 0, ќе го нарекуваме **нулти вектор**.

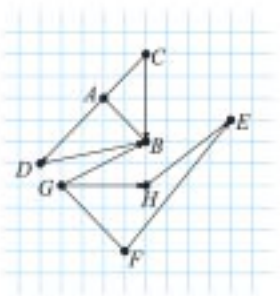
ЗАДАЧА 4

Скицирај вектор $\vec{a}$, таков што:
а) $|\vec{a}|=3$ cm, б) $|\vec{a}|=1$ cm, в) $|\vec{a}|=0$ cm.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

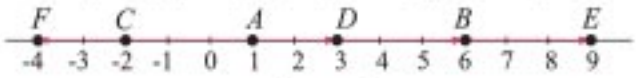
1. Запиши ги сите отсечки и вектори кои ги гледаш на цртеж 3.

2. Со помош на квадратната шема, земајќи дека должината на страната на квадратчето од шемата е 1 cm, одреди ја должината на сите отсечки и вектори од задача 1.



Цртеж 3

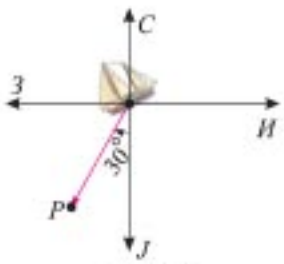
3. На бројна оска се избрани точки како на цртеж 4. Одреди ја должината на а) $\overrightarrow{AD}$, б) $\overrightarrow{CF}$, в) $\overrightarrow{BE}$, г) $\overrightarrow{DB}$, д) $\overrightarrow{AB}$ и ѓ) $\overrightarrow{FE}$.



Цртеж 4

4. За секоја од дадените величини одреди дали е векторска:
а) 10 km/h, б) 10 N, в) 50 m/s кон југ, г) 15 g/cm³.

5. Ако страните на светот ги означиш како на цртеж 5, тогаш како ќе ја претставиш промената на патеката на бродот, за 30° југозапад?



Цртеж 5

ИСТРАЖУВАЊЕ

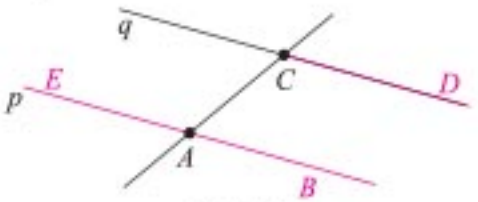
Со соученикот што седи до тебе, со помош на конец со иста должина, врзете лесен предмет и поставете го на клупата. Прво секој поединечно нека го влече предметот. Што забележуваш. Почнете истовремено да го влечете предметот. Што забележуваш. Дали движењето на предметот е поразлично. Зошто?

Наведи примери на величини кои се векторски и обиди се да скицираш како ќе се претстават со помош на вектори.

4.2. Еднакви и спротивни вектори. Колинеарни вектори

На цртеж 1 се дадени две паралелни прави p и q. Разгледај ги полуправите AB, CD и AE, со почетни точки во A и C. Размисли и одреди кои од следниве тврдења се точни:

а) Правата AC ја дели рамнината на две полурамнини
б) Полуправите AB и CD лежат во иста полурамнина
в) Полуправите AE и CD лежат во различни полурамнини
г) Полуправите AB и CD имаат ист правец
д) Полуправите AE и CD имаат ист правец



Цртеж 1

Нека се дадени две паралелни прави на кои се означени две полуправи. Ако двете полуправи се подмножества од иста полурамнина, тогаш велиме дека двете полуправи имаат **иста насока**. Во спротивно ќе велиме дека имаат **спротивни насоки**.

Насока се дефинира само ако полуправите имаат **ист правец**.

Векторите, кои имаат ист правец, ќе ги нарекуваме **колинеарни**.

Нултиот вектор има ист правец и иста насока со секој вектор.

Два вектори $\vec{AB}$ и $\vec{DC}$ имаат:

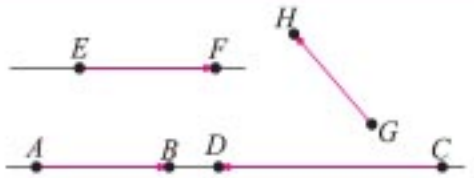
- **иста големина**, ако $\overline{AB} = \overline{CD}$ и пишуваме $\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{CD}\right|$,
- **ист правец**, ако AB и CD се паралелни прави и пишуваме $\vec{AB} \| \vec{CD}$,
- **иста насока**, ако полуправите AB и CD имаат иста насока и пишуваме $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$,
- **спротивни насоки**, ако полуправите AB и CD имаат спротивни насоки и пишуваме $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{CD}$.

За два вектори $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ ќе велиме дека се **еднакви** $\left(\vec{AB} = \vec{CD}\right)$ ако имаат иста големина, ист правец и иста насока.

За два вектори $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ ќе велиме дека се **спротивни** $\left(\vec{AB} = -\vec{CD}\right)$ ако имаат иста големина, ист правец и спротивни насоки.

ПРИМЕР 1

На цртеж 2 се претставени две паралелни прави. Векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ се колинеарни меѓу себе, но векторот $\overrightarrow{GH}$ не е колинеарен со нити еден од нив. Векторите $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{CD}$ се спротивно насочени, но не се спротивни еден на друг.



Цртеж 2

ЗАДАЧА 1

На цртеж 3 се дадени вектори. Одреди:

а) кој вектор има најголема должина,

б) кој вектор има најмала должина,

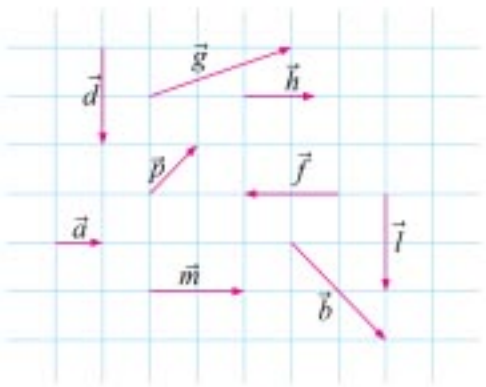
в) кои вектори се единични,

г) кои вектори имаат должина 2,

д) кои вектори се колинеарни,

ѓ) кои вектори се еднакви,

е) кои вектори се спротивни.



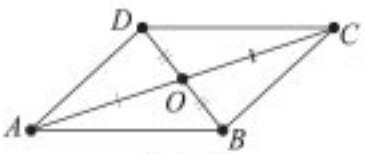
Цртеж 3

ЗАДАЧА 2

Нека $ABCD$ е паралелограм и O е пресекот на неговите дијагонали (цртеж 4). Означи ги и одреди го заемниот однос на следниве парови вектори:

а) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ б) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ в) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$

г) $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}$ д) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$



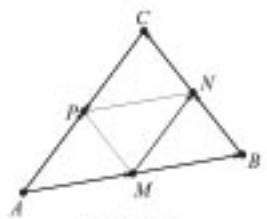
Цртеж 4

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Нека ABC е триаголник и M, N, P се средините на страните AB, BC, CA, соодветно (цртеж 5). Кои од следните равенства се точни:

а) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CP}$, б) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BN}$, в) $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM}$,

г) $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BN}$, д) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MN}$?

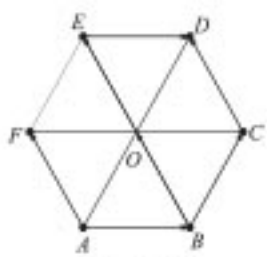


Цртеж 5

2. Нека $ABCDEF$ е правилен шестаголник и O е центар на опишаната кружница (цртеж 6). Кои од следните равенства се точни:

а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$, б) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC}$,

в) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OE}$, г) $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OE}$?

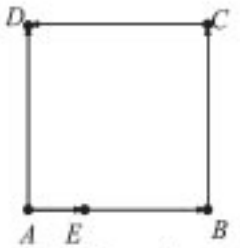


Цртеж 6

3. На страните на квадратот $ABCD$ зададени се неколку вектори (цртеж 7). Наведи кои од нив се:

а) колинеарни, б) истонасочени,

в) еднакви, г) спротивни.



Цртеж 7

4. Кои од следните тврдења се точни:

а) Ако два вектори се колинеарни, тогаш тие се еднакви,

б) Ако два вектори се еднакви, тогаш тие се колинеарни,

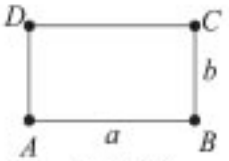
в) Ако два вектори се колинеарни и имаат еднакви должини, тогаш тие се еднакви,

г) Ако два вектори имаат иста насока и еднакви должини, тогаш тие се еднакви.

5. Даден е правоаголник со страни $a = 2$ cm и $b = 1$ cm, како на цртеж 8. На страните на правоаголникот означи вектори кои се:

а) еднакви на $\overrightarrow{BC}$, б) спротивни на $\overrightarrow{AD}$,

в) еднакви на $\overrightarrow{AB}$, г) спротивни на $\overrightarrow{CD}$, д) единични.



Цртеж 8

ИСТРАЖУВАЊЕ

Нацртај квадрат $ABCD$ со должина на страната од 2 cm. Означи ги сите вектори по неговите страни и дијагоналите. Запиши парови вектори кои се:

а) еднакви, б) спротивни, в) колинеарни.

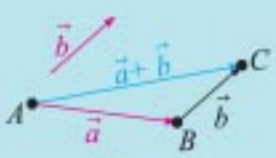
Потоа провери ги добиените одговори со помош на геометриски софтвер.

4.3. Операции со вектори

Собирање вектори

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се произволни неколинеарни вектори во рамнината и $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Конструирај права која минува низ точката B и е паралелна со правата која е определена со векторот $\vec{b}$. Означи вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. На овој начин секогаш може да добиеш надоврзани вектори.

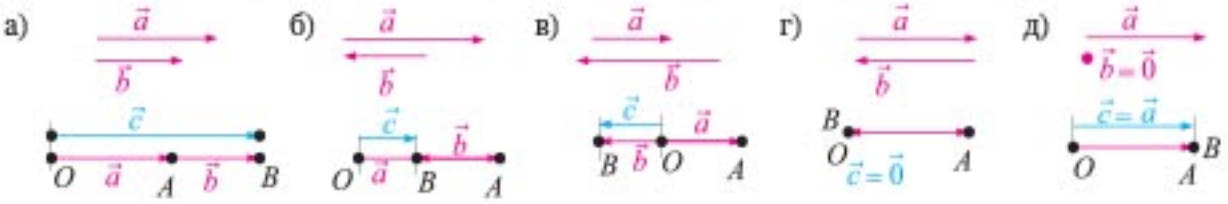
Збир на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарекува векторот $\overrightarrow{AC}$, т.е. векторот чиј почеток е почетокот на $\vec{a}$, а крај е крајот на $\vec{b}$. Збирот на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ќе го означуваме со $\vec{a} + \vec{b}$, т.е. $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, цртеж 1.
Овој начин на собирање вектори се нарекува **правило на триаголник.**



Цртеж 1

Нека се дадени два колинеарни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Можни се следните случаи (цртеж 2):

1) тие се истонасочени, па нивниот збир е вектор чија должина е збир од должините на двата вектора и насока како и насоката на векторите, цртеж 2 а)
2) тие се спротивно насочени и имаат различни должини, па нивниот збир е вектор чија должина е разлика на векторот со помала должина од векторот со поголема должина и насока еднаква на насоката на подолгиот вектор, цртеж 2 б) и в)
3) тие се спротивни вектори, па нивниот збир е нулти вектор, цртеж 2 г)
4) едниот од векторите е нулти вектор, па збирот е еднаков со другиот вектор цртеж 2 д)



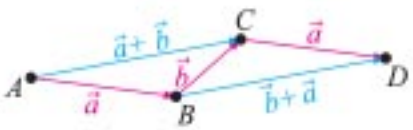
Цртеж 2

АКТИВНОСТ

Избери два неколинеарни вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Надоврзи го векторот $\vec{b}$ на векторот $\vec{a}$, и обратно, надоврзи го векторот $\vec{a}$ на векторот $\vec{b}$. Опиши што забележа!

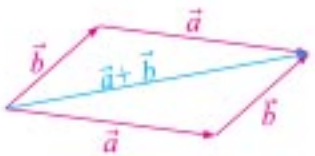
За секои вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, т.е. важи **комутативниот закон за собирање вектори**.

Навистина, Нека се дадени векторите $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ (цртеж 3). Збирот $\vec{b}+\vec{a}$ го добиваме кога крајот на $\vec{b}$ и почетокот на $\vec{a}$ се совпаѓаат, т.е. $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{BD}$. Тогаш $\overline{AB}=\overline{CD}$ и AB и CD се паралелни, па $ABDC$ е паралелограм. Значи векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ имаат иста големина и ист правец. Уште полуправите AC и BD лежат во иста полурамнина определена со правата AB, па векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ имаат иста насока. Следува $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}=\vec{b}+\vec{a}$.



Цртеж 3

Забелешка: Претходната постапка овозможува збирот на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ да се врши преку конструкција на паралелограм над тие вектори. Таа постапка се нарекува **правило на паралелограм** (цртеж 4).

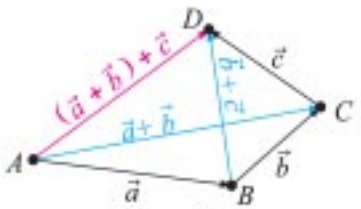


Цртеж 4

Нека, сега, трите вектори се надоврзани еден на друг, т.е. нека $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$ (цртеж 5). Тогаш $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, што значи дека важи следново својство:

За секои вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ важи $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ т.е. важи **асоцијативниот закон за собирање вектори.**

Ако $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{0}=\overrightarrow{BB}$, тогаш $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, што значи дека важи својството:



Цртеж 5

За секој вектор $\vec{a}$ важи $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Ако $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, тогаш $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$, па $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.
Според тоа важи следново својство:

За секој вектор $\vec{a}$ важи $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

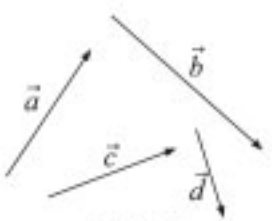
ПРИМЕР 1

Нека A, B и C се три точки во рамнината.

Векторот $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ е нулти вектор, бидејќи од правилото на триаголник имаме:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

ЗАДАЧА 1

Прецртај ги во тетратката дадените вектори од цртеж 6, надоврзи ги и одреди го нивниот збир со помош на правилото на триаголник.

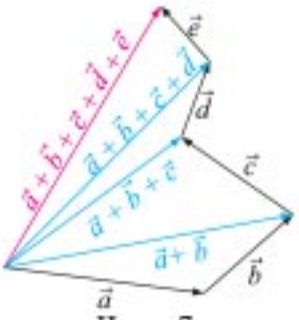


Цртеж 6

АКТИВНОСТ

Избери некој геометриски софтвер, нацртај слични вектори како од задача 1 и обиди се да го примениш правилото на триаголник така што при секој обид ќе го менуваш редоследот на собироците.

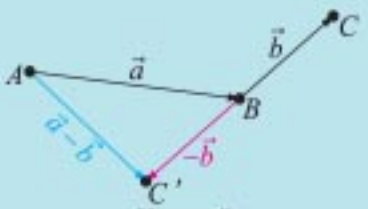
Општо, за собирање на n вектори, каде n е природен број, се користи **правилото на многуаголник**. Векторите се „надоврзуваат" еден на друг (почетокот на следниот е во крајот на претходниот) и нивниот збир е векторот чиј почеток е во почетокот на првиот, а крајот е во крајот на последниот вектор (цртеж 7). Имено, прво се добива векторот кој е збир на првите два вектори, потоа тој се собира со третиот вектор итн.



Цртеж 7

Одземање вектори

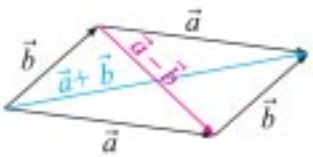
Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се произволни вектори, тогаш **разликата** $\vec{a}-\vec{b}$ се дефинира со $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ (цртеж 8).



Цртеж 8

Ова значи дека одземањето вектори е собирање на еден вектор и спротивниот на другиот вектор. Според тоа, важи $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AC'}$, за произволни точки A, B и C од рамнината.

Ако имаме паралелограм конструиран над два вектори, $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тогаш векторот $\vec{a}+\vec{b}$ лежи на дијагоналата која минува низ нивниот заедничкиот почеток, а векторот $\vec{a}-\vec{b}$ лежи на другата дијагонала (цртеж 9).



Цртеж 9

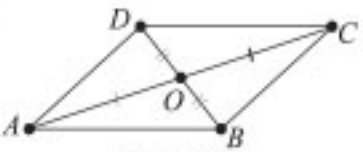
ЗАДАЧА 2

Нека $ABCD$ е паралелограм и O пресекот на неговите дијагонали, цртеж 10. Упрости ги изразите:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CO}$, б) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}$,

в) $\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OC}$, г) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DO}\right)+\overrightarrow{OA}$,

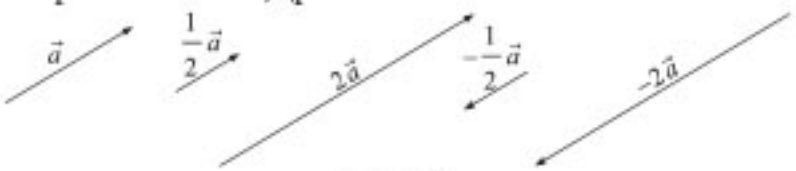
д) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$, ѓ) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BO}$



Цртеж 10

Множење на вектор со број (скалар)

Нека $\vec{a}$ е вектор и k е скалар (реален број). Векторот $k\vec{a}$ е вектор кој има ист правец со правецот на $\vec{a}$, должина $|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|$ и ако $k>0$, векторите $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ имаат исти насоки, а ако $k<0$, векторите $k\vec{a}$ и $\vec{a}$ имаат спротивни насоки, цртеж 11.



Цртеж 11

Векторот $k\vec{a}$ се нарекува **производ на векторот $\vec{a}$ со скаларот k.**

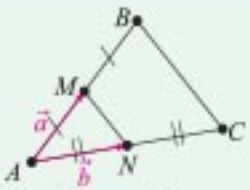
За множењето на вектор со скалар важат следниве својства:

За секој вектор $\vec{a}$ и скалар k важи $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}, k \cdot \vec{0} = \vec{0}, 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}$
За секои скалари k и m и вектор $\vec{a}$ важи $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$ и $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$.
За секој скалар k и секои вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
Ненултите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни ако и само ако постои скалар $k \neq 0$, така што $\vec{a} = k\vec{b}$. Ако $k \neq 0$ со $\frac{\vec{a}}{k}$ ќе го означуваме векторот $\frac{1}{k}\vec{a}$. Значи, $\frac{\vec{a}}{k} = \frac{1}{k}\vec{a}$.

ПРИМЕР 2

На цртежот 12, дадени се векторите $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$ такви што $\overline{AM} = \overline{MB}$ и $\overline{AN} = \overline{NC}$. Ќе ги изразиме векторите $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BN}$ со помош на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

За векторот $\overrightarrow{BM}$ имаме: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\vec{a}$, слично $\overrightarrow{NC} = \vec{b}$,
а за векторот $\overrightarrow{MN}$ од правилото на триаголник имаме:
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} + \vec{b}$, или $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a}$
ако се искористи разлика на вектори и
$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -\vec{a} - \vec{a} + \vec{b} = -2\vec{a} + \vec{b}$



Цртеж 12

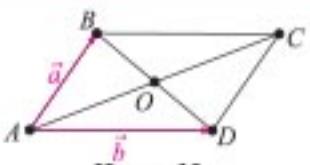
ПРИМЕР 3

Упрости ги изразите:
а) $3\vec{a} + 2(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$, б) $2(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) + 4\vec{b} + 5(\vec{c} - \vec{a})$

Со примена на својствата за множење на вектор со скалар се добива:
а) $3\vec{a} + 2(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 3\vec{a} + 2\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$,
б) $2(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) + 4\vec{b} + 5(\vec{c} - \vec{a}) = 2\vec{a} - 4\vec{b} + 6\vec{c} + 4\vec{b} + 5\vec{c} - 5\vec{a} = -3\vec{a} + 11\vec{c}$.

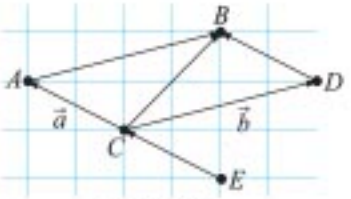
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Изрази ги векторите $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$ со помош на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако $ABCD$ е паралелограмот на цртеж 13.



Цртеж 13

2. Нека $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$. Според цртеж 14, изрази ги со помош на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите: $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{ED}$.



Цртеж 14

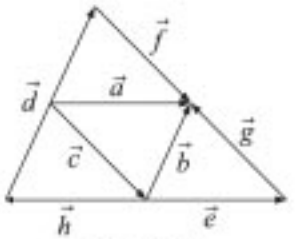
3. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$ и O е центар на опишаната кружница. Нека $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AF} = \vec{a}$. Изрази ги со помош на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторите: $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{CF}$.

4. Дијагоналите на паралелограмот $ABCD$ се сечат во точката S. Провери дали важат равенствата:
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{DS}$, б) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{SC}$, в) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} = \vec{0}$.

5. Упрости го изразот $2\left(\vec{a} - \vec{b}\right) - 5\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + 2\vec{a} + 6\vec{b}$.

6. Во каква заемна положба се наоѓаат точките A, B и C ако важи $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$?

7. Со помош на правилото на триаголник одреди го збирот на векторите $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{h}$, цртеж 15.



Цртеж 15

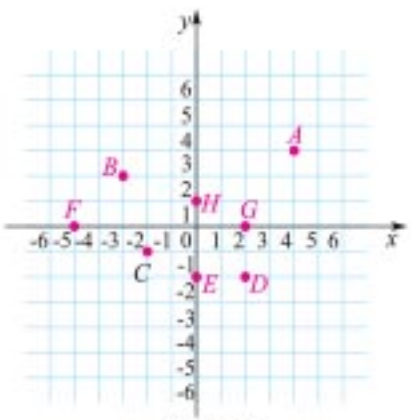
ИСТРАЖУВАЊЕ

Во геометриски софтвер нацртај произволен конвексен четириаголник $ABCD$. Означи ги средините M, N, P и Q на страните AB, BC, CD и DA, соодветно. Провери какви се паровите вектори $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{QP}$, односно $\overrightarrow{MQ}$ и $\overrightarrow{NP}$. Што можеш да кажеш за четириаголникот $MNPQ$?

4.4. Координати на вектор

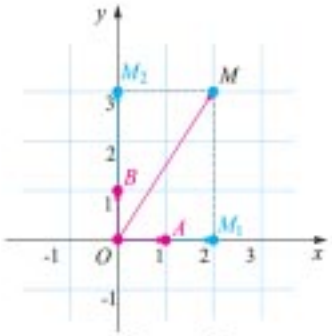
АКТИВНОСТ

Најди ги координатите на точките A, B, C, D, E, F, G и H дадени во координатниот систем на цртеж 1.



Цртеж 1

Нека е даден координатен систем и точките $A(1,0)$, $B(0,1)$. Векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ се единечни вектори вдолж координатните оски, каде што $O(0,0)$ е координатниот почеток, цртеж 2, и нека $M(2,3)$ е дадена точка. Со помош на операцијата собирање вектори и множење на вектор со скалар се добива дека $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$.



Цртеж 2

Ако $M(x,y)$ е точка во координатен систем, тогаш $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, каде што $A(1,0)$, $B(0,1)$ и $O(0,0)$ е координатниот почеток.
Поопшто, ако $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, тогаш $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ т.е. $\overrightarrow{OM} = (x, y)$. Притоа векторите $\vec{i}$ и $\vec{j}$ се нарекуваат и единични вектори на координатниот систем.

Секој вектор со почеток во координатниот почеток се нарекува **радиус вектор на точката M** или **вектор на положба на точката M.**

ЗАДАЧА 1

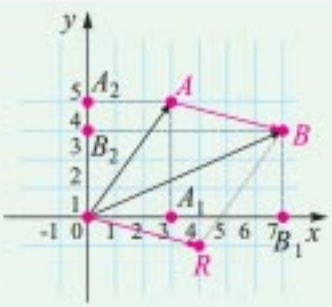
Запиши ги векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OG}$ и $\overrightarrow{OH}$, според координатите на точките од цртеж 1, потоа одреди ги нивните должини.

Ако $M(x,y)$ е точка во координатен систем, тогаш $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ПРИМЕР 1

Во координатен систем, дадени се точките $A(3,4)$ и $B(7,3)$ (цртеж 3).

Треба да ги одредиме координатите на $\overrightarrow{AB}$. Од тоа што $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ следува дека $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ т.е.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 7\vec{i} + 3\vec{j} - (3\vec{i} + 4\vec{j}) = (7-3)\vec{i} + (3-4)\vec{j}$.
Значи, $\overrightarrow{AB} = (7-3, 3-4) = (4, -1)$, а неговата должина е
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(7-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$.
Точката $R(4, -1)$ го определува радиус векторот $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{AB}$.



Цртеж 3

Притоа, векторот $\overrightarrow{OR}$ се нарекува **вектор на положба** на $\overrightarrow{AB}$.



Ако $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ се две точки во координатен систем, тогаш $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, а неговата должина е $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

На овој начин, секој вектор $\overrightarrow{AB}$ кај кој крајните точки A и B се зададени со координати, може да се запише со координати, и да се одреди вектор на положба $\overrightarrow{OR}$ на $\overrightarrow{AB}$.

ПРИМЕР 2

Нека $P(-3, -5)$, $Q(7, -8)$. Одреди го векторот на положба на $\overrightarrow{PQ}$.

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PQ} = (7-(-3), -8-(-5)) = (10, -3)$

ЗАДАЧА 2

Одреди го векторот $\overrightarrow{OB}$, ако $\overrightarrow{OA} = (3,5)$ и $\overrightarrow{AB} = (1,7)$.



Два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$ се еднакви т.е. $\vec{a} = \vec{b}$, ако и само ако $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$.

ПРИМЕР 3

Нека $\vec{a} = (k + m, 11)$ и $\vec{b} = (3, k - m)$ и $\vec{a} = \vec{b}$.

Тогаш $\begin{cases} k + m = 3 \\ k - m = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7 \\ m = -4 \end{cases}$.



Нека $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$ и k е реален број (скалар). Тогаш $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ и $k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1, k \cdot a_2)$.

Забелешка. За операциите собирање и одземање вектори и множење вектор со скалар, кога векторите се дадени со координати, важат истите својства како и кога векторите се дадени геометриски.

ЗАДАЧА 3

Нека $A(3,-5)$, $B(12,5)$ и $C(-1,7)$. Одреди ги $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ и $3 \cdot \overrightarrow{BC} - 2 \cdot \overrightarrow{AC}$.

ПРИМЕР 4

Нека $P(k,-1)$, $Q(2,4)$ и $R(5,3k)$. Одреди ја вредноста на k, ако $\left|\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}\right|=5$.

Бидејќи $\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QR}=(3,3k-4)$, имаме $\sqrt{3^2+(3k-4)^2}=5$ т.е. $9+(3k-4)^2=25$ од каде се добива дека $(3k-4)^2=16$, па $3k-4=4$ или $3k-4=-4$, односно $k=\frac{8}{3}$ или $k=0$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Нека $\overrightarrow{OA}=-5\vec{i}+3\vec{j}$ и $\overrightarrow{AB}=7\vec{i}-\vec{j}$. Одреди го $\overrightarrow{OB}$.
2. Нека $\overrightarrow{BA}=(2,-3)$ и $\overrightarrow{BC}=(-3,1)$. Одреди го $\overrightarrow{AC}$.
3. Нека $\overrightarrow{OP}=5\vec{i}-3\vec{j}$, $\overrightarrow{OQ}=\vec{i}-6\vec{j}$ и $\overrightarrow{OR}=\vec{i}-\vec{j}$. Дали точките P, Q и R лежат на иста права?
4. Нека $\vec{a}=2\vec{i}+k\vec{j}$ и $\vec{b}=(m,-5)$. Одреди ги вредностите на k и m, ако $2\vec{a}+\vec{b}=8\vec{i}-3\vec{j}$.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Искористи геометриски софтвер во кој ќе избереш две точки A и B, а потоа нацртај ја точката C чии координати се еднакви со координатите на $\overrightarrow{AB}$. Набљудувај ги векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Запиши што забележа за нив. Повтори ја постапката за нови две точки и запиши ги забелешките.

4.5. Примена на вектори

ИСТРАЖУВАЊЕ

Векторите имаат широка примена во техниката, физиката, математиката и други науки.

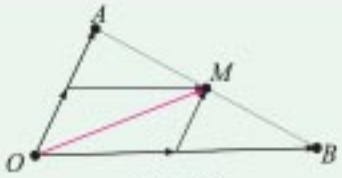
Направи истражување со кое ќе го поткрепиш ова тврдење.

ПРИМЕР 1

Нека M е средишна точка на отсечката AB, а O е произволна точка во рамнината. Докажи дека $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

Векторот $\overrightarrow{OM}$ може да се добие како збир на два начина: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$, (цртеж 1). Ако ги собереме овие равенства, добиваме:

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$, $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM})$,
$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \vec{0}$, бидејќи $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$
се спротивни вектори т.е.
$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} = \vec{0}$. Значи, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

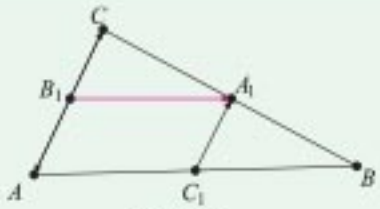


Цртеж 1

ПРИМЕР 2

Точките A_1 и B_1 се средини на страните BC и AC на триаголникот ABC, соодветно (цртеж 2). Докажи дека $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Според правилото на триаголник, имаме: $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1}$.
Од друга страна имаме: $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$.
Со собирање на овие равенства, добиваме:
$2\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$.
$2\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{B_1A}) + (\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{BA_1})$; $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \vec{0} + \vec{0}$;
$\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Цртеж 2

Забелешка. Отсечката A_1B_1 се нарекува средна линија во триаголникот ABC, таа е паралелна со страната AB и од тоа што $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ следува дека $|\overrightarrow{B_1A_1}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$, а тоа значи дека векторите се колинеарни, т.е. $\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ и $B_1A_1 \| AB$. Значи, средната линија во триаголник има должина половина од должината на страната паралелна со неа.

ПРИМЕР 3

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се неколинеарни вектори и x и y се произволни реални броеви. Ако $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$, тогаш $x = y = 0$. Докажи!

Од тоа што $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се неколинеарни вектори следува дека тие не се нулти вектори. Да претпоставиме спротивно т.е. $x \neq 0$. Тогаш од $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ следува дека $\vec{a} = -\frac{y}{x}\vec{b}$ што значи дека векторите се колинеарни. Ова е контрадикција со претпоставката. Аналогно се добива ако ја земеме другата претпоставка т.е. $y \neq 0$. Според ова, мора да важи $x = y = 0$.

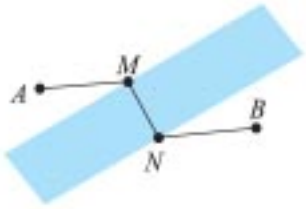
ПРИМЕР 4

Дијагоналите во секој паралелограм се преполовуваат. Докажи!

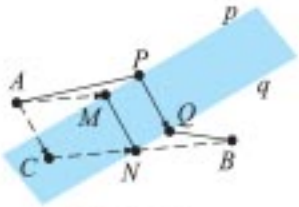
Нека $ABCD$ е паралелограм и O е пресечната точка на дијагоналите AC и BD. Бидејќи точките A, O и C се колинеарни, следува дека постои реален број x таков што $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AC} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.
Аналогно, постои реален број y таков што $\overrightarrow{BO} = y\overrightarrow{BD} = y(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$.
Од друга страна $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = (x-1)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$, па мора
$y(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = (x-1)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$ т.е. $(x-1+y)\overrightarrow{AB} + (x-y)\overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ не се колинеарни, па од пример 3 имаме $x-1+y=0$ и $x-y=0$ т.е. $x = y = \frac{1}{2}$.

ПРИМЕР 5

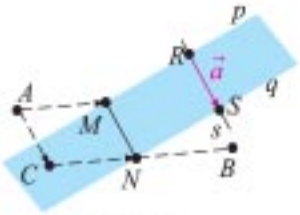
Меѓу градовите A и B има река со паралелни страни p и q. Каде треба да се изгради мост, нормално поставен на бреговите на реката, така што патот од градот A до градот B да биде најкус (цртеж 3)?



Цртеж 3



Цртеж 4



Цртеж 5

Нека PQ е бараниот мост (цртеж 4). Ако $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, избираме точка C таква што $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC}$, па четириаголникот $APQC$ е паралелограм. Следува дека $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AP}$. За да биде патот од A до B најкус, искршената линија CQB треба да е најкуса, а тоа е можно ако точките C, Q и B се колинеарни. Значи $\{Q\} = CB \cap q$.

Според тоа, бараното место M го наоѓаме на следниов начин:

- Конструираме права s нормална на правите p и q. Нека $\{R\} = s \cap p$ и $\{S\} = s \cap q$ (цртеж 5).
- Конструираме вектор $\overrightarrow{AC}$, така што $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{RS}$ и нека $\{N\} = BC \cap q$, па бараната точка M е таква што важи $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{RS}$.

Патот $AMNB$ е најкус. Бидејќи $\overline{MN}$ е константа, патот зависи само од должините на отсечките AM и NB, а нивниот збир е најмал кога точките C, N и B се колинеарни.

ПРИМЕР 6

Две населени места означени со A и B лежат на иста страна од еден прав пат. Каде на тој пат треба да се постави автобуска станица C, таква што збирот од растојанијата $\overline{AC} + \overline{BC}$ да е најмал?

Нека M е средината на отсечката AA_1 која е нормална на патот и $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA_1}$ (цртеж 6). Тогаш ΔAMC и ΔA_1MC се складни, па $\overline{AC} = \overline{A_1C}$. Според тоа $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{A_1C} + \overline{BC}$.



Цртеж 6

Ако C не лежи на A_1B, тогаш од неравенството на триаголникот следува дека $\overline{A_1C} + \overline{BC} > \overline{A_1B}$. Ако, пак, C лежи на A_1B, тогаш $\overline{A_1C} + \overline{BC} = \overline{A_1B}$, т.е. $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{CB}$ се колинеарни. Според тоа $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{A_1C} + \overline{BC}$ има најмала вредност кога точката C е пресек на правата A_1B со патот. Значи, најмалата вредност за бараното растојание е пресечната точка на патот со правата A_1B, каде што A_1 е симетричната точка на A во однос на патот, т.е. важи $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA_1}$.

АКТИВНОСТ

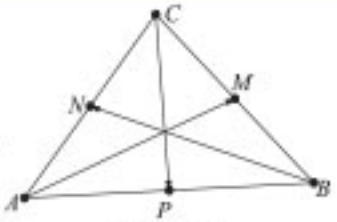
На слика 3 со $\vec{v}$ е означена моментната брзина, а со $\vec{a}$ е означено забавувањето на автомобилот, т.е. отпорот на воздухот. Објасни зошто $\vec{a}$ е спротивно насочен вектор со $\vec{v}$ и запиши релација којашто ги поврзува овие два вектора.



Слика 3

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Нека M,N и P се средини на страните на триаголникот ABC (цртеж 7). Докажи $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.



Цртеж 7

2. Нека T е тежиште во ΔABC. Докажи дека $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$, каде што O е произволна точка во рамнината.

3. Даден е квадрат $ABCD$ и S е точка во која се сечат неговите дијагонали. Нека M и N се средини на страните BS и DS, соодветно. Изрази ги векторите $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, со помош на векторите $\overrightarrow{AM}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{AN}=\vec{n}$.

4. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$ и S е центар на опишаната кружница. Упрости ги векторите: а) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$, б) $\overrightarrow{SF}+\overrightarrow{AB}$, в) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{ES}$, г) $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CS}$.

5. Нека D, E и F се средини на страните BC, AC и AB, соодветно, на ΔABC. Ако $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{n}$, тогаш изрази ги векторите $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$ со помош на векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

6. Со вектор $\vec{v_1}$ е претставена брзината на водата, со вектор $\vec{v_2}$ е претставена брзината на движењето на кајакот без дејство на водата, а со $\vec{v}$ брзината на кајакот со дејството на водата (слика 4). Најди ја големината на брзината $\vec{v}$, ако $|\vec{v_1}|=4\,\text{m/s}$ и $|\vec{v_2}|=6\,\text{m/s}$.

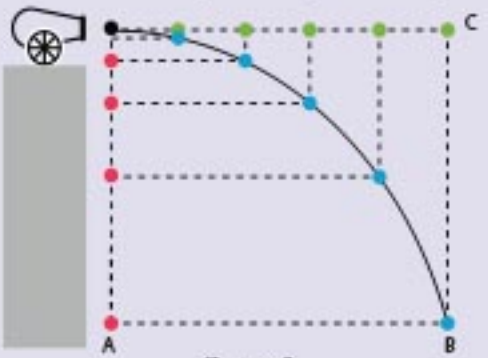


Слика 4

ИСТРАЖУВАЊЕ

1) Зоран е кајакар и сака да дознае зошто побрзо се движи по течението на реката отколку спротивно од нејзиното течение. Исто така, сака да знае зошто преку реката не стигнува на местото кон кое тргнал да весла. Што можеш да му одговориш на Зоран.

2) Јана влече санка по рамен пат. Јажето со кое ја влече санката формира агол од 30 степени со подлогата. Силата со која ја влече санката е 20 N. Определи ги сите сили кои влијаат на санката. Нацртај график на кој ќе ги прикажеш силите. Определи кои сили се со спротивна насока. Силата со која Јана ја влече санката разложи ја по хоризонталната и вертикалната компонента. Определи како овие сили влијаат врз движењето на санката.



Слика 3

3) Во моментот кога топот испалува ѓуле хоризонтално, идентично ѓуле се пушта да паѓа вертикално надолу (слика 3). Кое ѓуле прво ќе стигне до земјата? Објасни.

4.6. Тригонометриски односи од остар агол во правоаголен триаголник

Триаголникот ABC има прав агол (90°) во темето C. Двата агли при темињата A и B се остри агли (цртеж 1). Страната AB спроти правиот агол се нарекува **хипотенуза**. Ако го означиме со α еден од острите агли во триаголникот, тогаш страната BC се нарекува **спротивна катета за аголот** α, а страната AC се нарекува **налегната катета** за аголот α.



Цртеж 1

- **Синус** од аголот α се нарекува количникот од должината на спротивната катета за аголот α, $\overline{BC}$ и должината на хипотенузата $\overline{AB}$ т.е. $\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$.
- **Косинус** од аголот α се нарекува количникот од должината на налегнатата катета за аголот α, $\overline{AC}$ и должината на хипотенузата $\overline{AB}$ т.е. $\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.
- **Тангенс** од аголот α се нарекува количникот од должината на спротивната катета $\overline{BC}$ и должината на налегнатата катета за аголот α, $\overline{AC}$ т.е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$.
- **Котангенс** од аголот α се нарекува количникот од должината на налегнатата катета $\overline{AC}$ и должината на спротивната катета за аголот α, $\overline{BC}$ т.е. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Претходно дефинираните односи кои ја даваат зависноста меѓу должините на страните во правоаголен триаголник и неговите остри агли се викаат **тригонометриски односи**.

ПРИМЕР 1

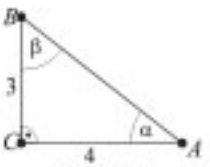
За тригонометриските односи од остриот агол δ во правоаголникот $ABCD$ на цртеж 2 имаме $\sin\delta = \frac{b}{d}$, $\cos\delta = \frac{a}{d}$, $\operatorname{tg}\delta = \frac{b}{a}$ и $\operatorname{ctg}\delta = \frac{a}{b}$.



Цртеж 2

ЗАДАЧА 1

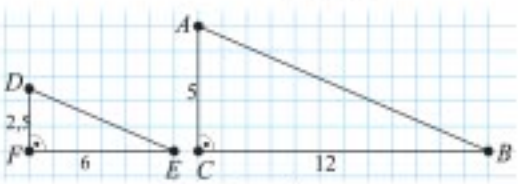
Даден е правоаголен триаголник чии катети се 3 cm и 4 cm. Одреди ги $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\beta$ (цртеж 3).



Цртеж 3

ЗАДАЧА 2

Дадени се два правоаголни триаголници ABC и DEF, цртеж 4. Одреди ги тригонометриските односи од остриот агол α во двата триаголници. Докажи дека тие се еднакви.



Цртеж 4

Ако два правоаголни триаголници имаат ист однос на соодветните страни, тогаш тие имаат **исти тригонометриски односи** од соодветните остри агли.

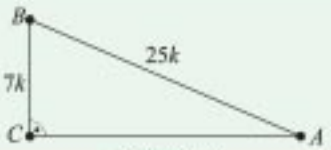
ПРИМЕР 2

Познато е дека во некој правоаголен триаголник $\sin\alpha = \frac{7}{25}$. Одреди ги останатите тригонометриски односи од аголот α, цртеж 5.

Ако ги означиме страните на тој триаголник $a=7k$, $c=25k$.

Тогаш, според Питагоровата теорема $b = \sqrt{(25k)^2 - (7k)^2} = 24k$,

па $\cos\alpha = \frac{24k}{25k} = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7k}{24k} = \frac{7}{24}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$.



Цртеж 5

ПРИМЕР 3

Со помош на калкулатор, спореди ги тригонометриските односи:

а) $\sin 35°$ и $\sin 67°$, б) $\cos 40°$ и $\cos 23°$,

в) $\operatorname{tg} 36°$ и $\operatorname{tg} 58°$, г) $\operatorname{ctg} 73°$ и $\operatorname{ctg} 39°$.

Сигурно забележа дека $\sin 35° < \sin 67°$, $\cos 40° < \cos 23°$, $\operatorname{tg} 36° < \operatorname{tg} 58°$ и $\operatorname{ctg} 73° < \operatorname{ctg} 39°$.

Нека триаголниците на цртеж 6 имаат еднакви хипотенузи $\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = \ldots = \overline{OB_n} = r$. Острите агли меѓу хипотенузата и катетите OA_1, OA_2, .., OA_n ќе ги означиме со α_1, α_2, ..., α_n.

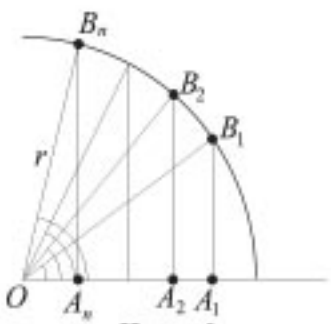
Според конструкцијата сигурно забележа дека $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, $\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2} < \ldots < \overline{A_nB_n}$ и $OA_1 > OA_2 > \ldots > OA_n$.

Од равенствата $\sin\alpha_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{r}$, $\sin\alpha_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{r}$ ..., $\sin\alpha_n = \frac{\overline{A_nB_n}}{r}$ јасно е дека вредноста на синусот од остар агол расте кога аголот се зголемува.

Со други зборови, кога **аголот α расте од 0° до 90°, вредноста на $\sin\alpha$ расте.**

Од равенствата $\cos\alpha_1 = \frac{\overline{OA_1}}{r}$, $\cos\alpha_2 = \frac{\overline{OA_2}}{r}$, ..., $\cos\alpha_n = \frac{\overline{OA_n}}{r}$ се заклучува дека вредноста на косинусот од остар агол опаѓа кога аголот се зголемува.

Со други зборови, **кога аголот α расте од 0° до 90°, вредноста на $\cos\alpha$ опаѓа.**



Цртеж 6

На сличен начин, од равенствата:

$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}}$, ..., $\operatorname{tg}\alpha_n = \frac{\overline{A_nB_n}}{\overline{OA_n}}$

ќе заклучиме дека вредноста на тангенсот од остар агол расте кога аголот се зголемува, затоа што тогаш броителите се зголемуваат, а именителите на односите се намалуваат. Значи, вредноста на $\operatorname{tg}\alpha$ **расте**, почнувајќи од 0 и е ненегативен реален број, кога вредноста на α расте почнувајќи од 0° и е помала од 90°.

На сличен начин, заклучуваме дека вредноста на ctg α **опаѓа** до 0 и е ненегативен реален број, кога вредноста на α е поголема од 0° и расте до 90°.

Забелешка. За $0° < \alpha < 90°$ имаме дека $0 < \sin\alpha < 1$ и $0 < \cos\alpha < 1$.
За $0° < \alpha < 90°$ имаме дека $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и за $0° < \alpha < 90°$ имаме дека $\operatorname{ctg}\alpha > 0$.

ЗАДАЧА 3

Кое неравенство важи за аглите ако:

а) $\sin\alpha_1 > \sin\alpha_2 > \sin\alpha_3$, б) $\cos\beta_1 < \cos\beta_2 < \cos\beta_3$,

в) $\operatorname{tg}\gamma_2 > \operatorname{tg}\gamma_3 > \operatorname{tg}\gamma_1$, г) $\operatorname{ctg}\delta_3 < \operatorname{ctg}\delta_1 < \operatorname{ctg}\delta_2$?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Одреди ги тригонометриските односи од аголот β во правоаголен триаголник ако се дадени двете катети a и b: а) $a = 5, b = 12$, б) $a = 3, b = 5{,}2$.

2. Одреди ги тригонометриските односи од аголот α во правоаголен триаголник ако се дадени катетата a и хипотенузата c: а) $a = 8, c = 10$, б) $a = 9{,}8, c = 12{,}6$.

3. Одреди ги останатите тригонометриски функции од аголот α ако:
   а) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, б) $\cos\alpha = \frac{21}{29}$, в) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{52}{173}$, г) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{69}{269}$.

4. Провери дали се точни неравенствата:
   а) $\sin 13° > \sin 53° > \sin 88°$, б) $\cos 46° < \cos 22° < \cos 15°$.

ИСТРАЖУВАЊЕ

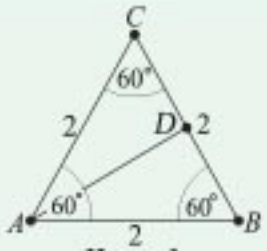
Избери геометриски софтвер и нацртај правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. Означи ги аглите во темињата A и B со α и β, соодветно, а катетите BC и AC, со a и b, соодветно. Избери катети за кои важи $a > b$. Повлечи ја висината CD кон хипотенузата. Разгледај ги односите $\frac{a}{b}$ и $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Опиши што забележа. Повтори ја постапката за катети за кои важи $a < b$.

4.7. Тригонометриски односи од аглите од 30°, 45° и 60°

ПРИМЕР 1

Да го разгледаме рамностраниот триаголник ABC со страна 2 cm (цртеж 1). Висината AD спуштена од темето A претставува во исто време симетрала на аголот при темето A како и симетрала на страната BC. Според тоа, $\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ и $\angle DAB = \frac{1}{2}\angle CAB = \frac{1}{2}\cdot 60° = 30°$.

Со примена на Питагоровата теорема за правоаголниот триаголник ABD на цртеж 2, добиваме дека $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$ од каде што следува дека $\overline{AD}^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, односно $\overline{AD} = \sqrt{3}$.



Цртеж 1

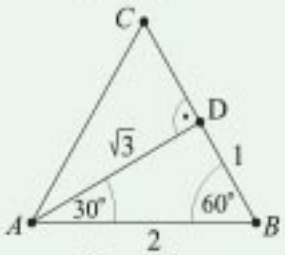
Сега тригонометриските односи за аглите во триаголникот ABD се:

$\sin 30^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = ctg30^\circ = \sqrt{3}$.

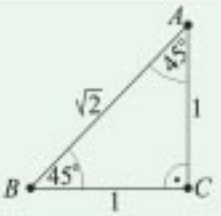


Цртеж 2

ПРИМЕР 2

За да ги пресметаме тригонометриските односи од агол 45°, конструираме рамнокрак правоаголен триаголник со страна 1 cm (цртеж 3). Неговите остри агли се по 45°. Според Питагоровата теорема хипотенузата $\overline{AB} = \sqrt{2}$.

Од дефиницијата на тригонометриските односи следува дека $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$ и $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 = \operatorname{ctg} 45^\circ$.



Цртеж 3

Добиените тригонометриски односи може да ги претставиме во табела:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

ЗАДАЧА 1

Пресметај ја вредноста на изразот $\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$

ПРИМЕР 3

Провери дали е точно равенството $4\sin^2 60^\circ + 4\cos^2 60^\circ = \operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ$.

Бидејќи $\operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ$, добиваме дека $\operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ = 2 \cdot \operatorname{tg}^2 60^\circ = 2(\sqrt{3})^2 = 6$.

Од друга страна имаме дека

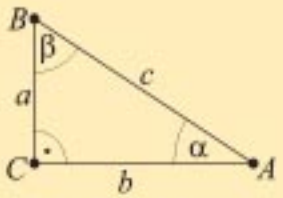
$$4\sin^2 60^\circ + 4\cos^2 60^\circ = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 + 1 = 4.$$

Бидејќи вредноста на левата страна е различна од вредноста на десната страна, односно $4 \neq 6$, заклучуваме дека $4\sin^2 60^\circ + 4\cos^2 60^\circ \neq \operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ$.

ЗАДАЧА 2

Одреди ја вредноста на изразот $\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin\alpha}$ за $\alpha = 30^\circ$.

Двата агли во правоаголен триаголник се **комплементни агли**. Ако α е еден од острите агли во правоаголниот триаголник ABC (цртеж 4), тогаш аголот $\beta = 90^\circ - \alpha$ е неговиот комплементен агол.



Цртеж 4

Страната a е спротивна катета за аголот α а налегната за аголот β, додека страната b е налегната катета за аголот α а спротивна за аголот β. Според тоа, за тригонометриските односи од аглите α и β, имаме дека:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta, \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta$$

од каде што добиваме дека: $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos(90^\circ - \alpha)$, $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin(90^\circ - \alpha)$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = ctg(90^\circ - \alpha), \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = tg(90^\circ - \alpha).$$

ПРИМЕР 4

Упрости го изразот:

а) $\sin 40^\circ + 4\cos 50^\circ$, б) $\frac{3\operatorname{tg} 20^\circ + 4\operatorname{ctg} 70^\circ}{5\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ}$.

Со примена на формулите за тригонометриски односи од комплементни агли наоѓаме дека

а) $\sin 40^\circ + 4\cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) + 4\cos 50^\circ = \cos 50^\circ + 4\cos 50^\circ = 5\cos 50^\circ$

б) $\frac{3\operatorname{tg} 20^\circ + 4\operatorname{ctg} 70^\circ}{5\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg} 70^\circ} = \frac{3\operatorname{tg} 20^\circ + 4\operatorname{tg}(90 - 70^\circ)}{5\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{ctg}(90 - 70^\circ)} = \frac{3\operatorname{tg} 20^\circ + 4\operatorname{tg} 20^\circ}{5\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{7\operatorname{tg} 20^\circ}{4\operatorname{tg} 20^\circ} = \frac{7}{4}$.

ПРИМЕР 5

Пресметај го аголот α, ако $\cos(\alpha + 10^\circ) = \sin 20^\circ$.

Со примена на формулите за тригонометриски односи од комплементни агли наоѓаме дека, $\cos(\alpha + 10^\circ) = \sin[90^\circ - (\alpha + 10^\circ)] = \sin 20^\circ$, од каде што следува дека $90^\circ - (\alpha + 10^\circ) = 20^\circ$. Со непосредна пресметка се добива дека $\alpha = 60^\circ$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\sin^2 30° + \cos^2 30°$, б) $\sin^2 45° + \cos^2 45°$, в) $\frac{\sin 30° + 1}{1 + \cos 60°}$, г) $\frac{\operatorname{tg} 30° + \operatorname{ctg} 45°}{\operatorname{ctg} 60° + \operatorname{tg} 45°}$.

2. Пресметај:

а) $2 \cdot \cos 30° \cdot \cos 45° \cdot \sin 30° \cdot \cos 60°$, б) $\sin^2 30° + \operatorname{tg}^2 60° \cdot \sin 30° \cdot \cos 60°$

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{1 + \sin 30°}{1 - \sin 30°}$, б) $\frac{\operatorname{ctg} 60° + \operatorname{tg} 45°}{1 - \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 45°}$, в) $\frac{4 \sin^2 45° + 1}{\operatorname{ctg}^2 30°}$.

4. Пресметај го аголот α, ако се знае дека:

а) $\cos(\alpha + 10°) = \sin 30°$, б) $\operatorname{tg} 35° = \operatorname{ctg}(\alpha + 15°)$,

в) $\sin(\alpha + 30°) = \cos(\alpha + 30°)$, г) $\operatorname{tg}(\alpha + 20°) = \operatorname{ctg}(\alpha - 10°)$.

5. Упрости ги изразите:

а) $\frac{3 \sin 35° + 5 \cos 55°}{2 \sin 35°}$, б) $\frac{\sin 40° \cdot \cos 50°}{\sin^2 40° + \cos^2 50°}$, в) $\frac{\sin 15°}{\cos 75°} + \frac{ctg62°}{tg28°}$

6. Ако $\alpha + \beta = 90°$, упрости ги изразите:

а) $\sin\alpha + \cos\beta$, б) $\sin\alpha - \cos\beta$, в) $\sin^2\alpha + \cos^2\beta$, г) $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$,

д) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}$, ѓ) $\frac{k - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{k + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}$, е) $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\beta + \cos\beta}$

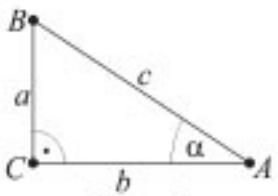
ИСТРАЖУВАЊЕ

Во геометриски софтвер нацртај рамностран триаголник. Избери произволна точка во внатрешноста на триаголникот. Измери ги растојанијата на таа точка до страните на триаголникот и спореди го нивниот збир со висината на триаголникот. Што забележа? Обиди се да изведеш доказ.

4.8. Тригонометриски односи од ист агол α

Познато е дека во правоаголен триаголник ABC (цртеж 1) важи Питагоровата теорема $a^2 + b^2 = c^2$. Ако ова равенство го поделиме со c^2 добиваме $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$, односно $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$.

Според тоа, имаме дека $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Бидејќи $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ и $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, со замена во последното равенство, добиваме $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.



Цртеж 1

ПРИМЕР 1

Нека $\alpha = 30°$, тогаш имаме дека $\sin^2 30° + \cos^2 30° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$



Со користење на $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ може да ги добиеме изразите:
$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ и $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

ЗАДАЧА 1

Пресметај $\cos \alpha$, ако $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

ПРИМЕР2

Упрости го изразот $(1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha)$

$(1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$

За правоаголниот триаголник ABC (цртеж 1) имаме $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$.
Ако ги поделиме броителот и именителот на десните страни од погорните равенства со c $(c \neq 0)$ добиваме дека

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ и } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Ако се помножат $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ добиваме уште едно равенство $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$

ЗАДАЧА 2

Пресметај $\operatorname{tg} \alpha$ ако $\operatorname{ctg} \alpha = 2$.

ПРИМЕР 3

Ако $\operatorname{tg} \alpha = 2$, тогаш $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}$.

За останатите тригонометриски односи од аголот α имаме: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ од каде што следува дека $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$, односно $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$. Од друга страна, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, па $(2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 5 \cos^2 \alpha = 1$. Според тоа, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$, односно $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Значи, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај ги останатите тригонометриски односи, ако е дадено:
   а) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, б) $\cos\alpha = 0{,}25$, в) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$, г) $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}41$.

2. Упрости ги изразите:
   а) $1-\cos^2\alpha$, б) $\sin^2\alpha - 1$, в) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$, г) $\frac{1}{1-\sin\alpha} + \frac{1}{1+\sin\alpha}$.

3. Докажи дека:
   а) $\sin^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha = 1$, б) $\sin^2\alpha \cdot (1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) + \cos^2\alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = 2$.

4. Докажи дека за сите остри агли важи:
   а) $\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$, б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$,
   в) $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

5. Докажи дека за сите остри агли важи:
   а) $\frac{1}{1-\cos\alpha} + \frac{1}{1+\cos\alpha} = \frac{2}{\sin^2\alpha}$, б) $\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} + \frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = 2$

6. Докажи дека за сите остри агли важи $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - 1} = \cos\alpha + \sin\alpha$.

7. Изрази ги: а) $\cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ со помош на $\sin\alpha$, б) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ со помош на $\operatorname{ctg}\alpha$.

8. Ако $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, пресметај ја вредноста на изразот $\frac{5\sin\alpha + \cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}$.

9. Пресметај ја вредноста на изразот $4\operatorname{tg}\alpha - 3\sin\alpha$, ако $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

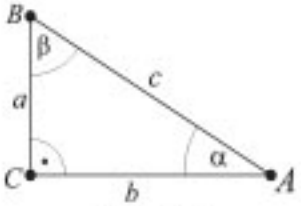
ИСТРАЖУВАЊЕ

Нацртај рамнокрак правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето C. На страната AC избери точка D така што $\measuredangle DBA = 30°$ и DE е висина во ΔABD. Ако означиме $\measuredangle CBD = \alpha$, тогаш пресметај $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, за $AE = 1$.

4.9. Решавање правоаголен триаголник

Нека a, b и c се страни на правоаголен триаголник ABC (цртеж 1) и нека α и β се неговите остри агли. Тогаш имаме дека $\alpha + \beta = 90°$ и $a^2 + b^2 = c^2$.
Освен тоа, од дефиницијата на тригонометриските односи имаме дека

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \frac{b}{c} = \cos\alpha, \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{a}{c} = \cos\beta, \frac{b}{c} = \sin\beta, \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta$$



Цртеж 1

Сето ова ќе го искористиме за пресметување на основните елементи на правоаголниот триаголник, неговите страни и агли, во случај кога се дадени:

- една страна и еден агол
- две страни

Да се реши правоаголен триаголник значи да се пресметаат сите негови основни елементи врз основа на дадените елементи, од кои барем еден е страна.

ПРИМЕР 1

Со помош на калкулатор одреди ја вредноста на:
а) $\sin 37°30'$, б) $\cos 70°40'$, в) $\operatorname{tg} 56°$, г) $\operatorname{ctg} 25°$.

а) Бидејќи $37°30' = 37° + \left(\frac{30}{60}\right)^{\circ} = 37° + 0{,}5° = 37{,}5°$, тогаш со помош на калкулаторот го избираме копчето **SIN** и добиваме дека $\sin 37{,}5° \approx 0{,}60876$,

б) Со помош на копчето **COS** добиваме дека $\cos 70°40' \approx \cos 70{,}67° \approx 0{,}331$,

в) Во овој случај со помош на копчето **TAN** имаме дека $\operatorname{tg} 56° \approx 1{,}48256$,

г) Во овој случај бидејќи $\operatorname{ctg} 25° = \frac{1}{\operatorname{tg} 25°}$, прво $\operatorname{tg} 25° \approx 0{,}46631$ од каде што $\operatorname{ctg} 25° \approx \frac{1}{0{,}46631} \approx 2{,}14$.

ПРИМЕР 2

Со помош на калкулатор одреди ја големината на аголот ако е познат некој негов тригонометриски однос т.е. одреди го аголот α ако:
а) $\sin\alpha = 0{,}26049$, б) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}04129$

а) Прво ја внесуваме вредноста 0,26049, а потоа избираме **SIN**$^{-1}$ и добиваме $\sin^{-1}(0{,}26049) \approx 15{,}099 \approx 15°59'$,

б) Слично $\operatorname{tg}^{-1}(0{,}04129) \approx 2{,}36° \approx 2°22'$

ПРИМЕР 3

Реши го правоаголниот триаголник со хипотенуза $c = 93$ cm и агол $\alpha = 42°23'$.

Триаголникот е решен ако ги одредиме должините на двете катети a и b и големината на остриот агол β. Острите агли во правоаголниот триаголник се комплементни, па $\beta = 90° - \alpha = 90° - 42°23' = 47°37'$. За да ја одредиме катетата a, со калкулатор пресметуваме $\sin 42{,}383° \approx 0{,}67408$ и конечно $a = c \cdot \sin\alpha = 93 \cdot 0{,}67408 \approx 62{,}7$ т.е $a \approx 63$ cm. Катетата b може да ја пресметаме со помош на хипотенузата и косинусот од аголот α или со примена на Питагоровата теорема.

прв начин. $b = c \cdot \cos\alpha = 93 \cdot \cos 42{,}383° = 93 \cdot 0{,}73866 \approx 68{,}7$, односно $b \approx 69$ cm.

втор начин. $b = \sqrt{93^2 - 63^2} \approx 69$ cm.

ПРИМЕР 4

Реши го правоаголниот триаголник со катети $a = 21$ cm и $b = 15$ cm.

Триаголникот е решен ако ја одредиме должината на хипотенузата и двата остри агли.

Хипотенузата ја пресметуваме со примена на Питагоровата теорема т.е. $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{21^2 + 15^2} = \sqrt{610} \approx 25$ cm. Аголот α ќе го одредиме со помош на функцијата тангенс. Од условот $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{21}{15} = 1{,}4$ пресметуваме дека $\alpha \approx 54^\circ 28'$.

За аголот β пресметуваме дека $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 54^\circ 28'$, односно $\beta \approx 35^\circ 32'$.

ЗАДАЧА 1

Реши го правоаголниот триаголник со катета $b = 53$ cm и агол $\beta = 64^\circ$.

ЗАДАЧА 2

Реши го правоаголниот триаголник со катета $a = 37$ cm и хипотенуза $c = 48$ cm.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

Во задачите 1-4, реши го правоаголниот триаголник ABC ако:

1. а) $\alpha = 36{,}2^\circ, c = 68$ cm, б) $\beta = 15{,}8^\circ, c = 12{,}2$ cm.
2. а) $\beta = 65{,}4^\circ, a = 2{,}35$ cm, б) $\alpha = 82^\circ, b = 246$ cm, в) $\beta = 48^\circ 30', b = 74{,}7$ cm.
3. а) $\alpha = 24^\circ, a = 5{,}25$ cm, б) $\alpha = 30^\circ 50', b = 53{,}5$ cm.
4. а) $b = 3{,}9$ cm, $c = 4{,}5$ cm, б) $a = 230$ cm, $c = 320$ cm, в) $a = 52{,}5$ cm, $b = 28$ cm.
5. Даден е правоаголник со страни $a = 5$ cm и $b = 20$ cm. Одреди го остриот агол под кој се сечат дијагоналите на правоаголникот.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Направи истражување за поимите агол на елевација и агол на депресија. Со каков прибор можат да се измерат овие агли во природата?

4.10. Плоштина на триаголник

АКТИВНОСТ

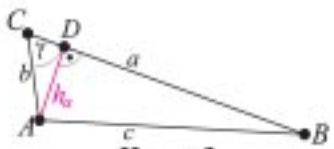
Даден е триаголникот ABC со $\gamma = 60°$, $a = 12$ cm и $b = 4$ cm (цртеж 1). Пресметај ја неговата плоштина.



Цртеж 1

Формулата со која се пресметува плоштина на триаголник е полупроизвод од една страна и должината на висината повлечена кон таа страна, па затоа ќе ја повлечеме висината h_a кон страната a (цртеж 2). Ако пресечната точка на висината со страната a ја означиме со D, тогаш триаголникот CAD е правоаголен со остар агол γ и $\sin\gamma = \frac{h_a}{b}$ т.е. $h_a = b \cdot \sin\gamma = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm,

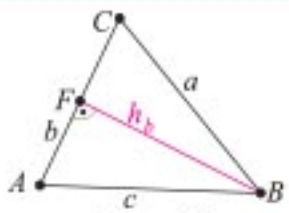
па $P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ cm^2.



Цртеж 2

АКТИВНОСТ

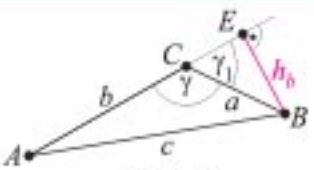
Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC ако е познат остриот агол γ и страните a и b. Разгледај го правоаголниот триаголник BCF (цртеж 3), со прав агол во темето F што е точка во која висината h_b ја сече страната b и докажи дека $P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$.



Цртеж 3

АКТИВНОСТ

Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC ако е познат тапиот агол γ и страните a и b. Ќе ја повлечеме висината h_b кон продолжението на страната b (цртеж 4). Остриот агол $\gamma_1 = 180° - \gamma$ и од правоаголниот триаголник CBE следува дека $\sin\gamma_1 = \frac{h_b}{a}$, па $h_b = a \cdot \sin\gamma_1$, од каде што $P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma_1}{2}$.



Цртеж 4

ЗАДАЧА 1

Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC со повлекување на висината h_a кон продолжението на страната a.

Забелешка. Од тоа што γ_1 е надворешен агол за триаголникот ABC т.е. $\gamma_1 = \alpha + \beta$, па $P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2}$.

Плоштината на триаголникот со даден остар агол γ и двете страни кои го образуваат тој агол, a и b, се пресметува со формулата $P_\Delta = \frac{ab\sin\gamma}{2}$.

Ако, пак, дадениот агол γ е тап, тогаш плоштината на триаголникот се пресметува со формулата $P_\Delta = \frac{ab\sin\gamma_1}{2}$, каде што $\gamma_1 = 180° - \gamma$.

ЗАДАЧА 2

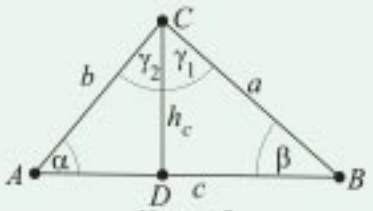
Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC со $\gamma = 120°$, $a = 7$ cm и $b = 15$ cm.

ПРИМЕР 1

Плоштината на триаголникот ABC е $P_{\Delta ABC} = 9\left(\sqrt{3}+1\right)$ cm^2, страната $a = 6$ cm и висината $h_c = 3\sqrt{2}$ cm. Реши го триаголникот ABC.

Од формулата за плоштина на триаголник имаме

$P_{\Delta ABC} = \frac{c \cdot h_c}{2}$, па $c = \frac{2 \cdot 9\left(\sqrt{3}+1\right)}{3\sqrt{2}} = \frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}}$ cm.



Цртеж 5

Од тоа што триаголникот BCD (цртеж 5) е правоаголен $\sin\beta = \frac{h_c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, па $\beta = 45°$.

Тогаш $\gamma_1 = 45°$, па $\overline{BD} = h_c = 3\sqrt{2}$ cm.

Значи $\overline{AD} = c - \overline{BD} = \frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ cm.

Триаголникот CAD е правоаголен, па $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_c}{\overline{AD}} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ од каде што следува дека $\alpha = 30°$.

Конечно $\gamma = 180° - 30° - 45° = 105°$ и $\sin 30^0 = \frac{3\sqrt{2}}{b}$, па $b = 6\sqrt{2}$ cm.

ЗАДАЧА 3

Плоштината на триаголникот ABC е $P_{\Delta ABC} = \left(\frac{15\sqrt{3}+27}{2}\right)$ cm^2, страната $b = 3\sqrt{6}$ cm и висината $h_c = 3\sqrt{3}$ cm. Реши го триаголникот ABC.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC зададен со:
   а) $a = 6$ cm, $b = 0{,}7$ dm и $\gamma = 45°$, б) $b = 9$ cm, $c = 0{,}5$ dm и $\alpha = 60°$.

2. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC ако:
   а) $b = 11$ cm, $\beta = 63°$ и $\gamma = 72°30'$, б) $a = 10$ cm, $\alpha = 38°$ и $\beta = 67°$.

3. Одреди ја плоштината на рамнокракиот триаголник ABC, ако аголот при основата е $30°20'$ и должина на основата е 6 cm.

4. Во трапез $ABCD$, дадени се помалата основа $b = 10$ cm, висината $h = 8$ cm и аглите при основата $\alpha = 30°20'$ и $\beta = 46°30'$. Пресметај ја плоштината на трапезот.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Снеловиот закон ја дава зависноста на индексот на прекршување и коефициентот на рефракција, $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$. Коефициентите за вода и стакло се 1,33 и 1,52, соодветно. Како се пресметува максималниот агол за кој светлински зрак ќе ја мине границата стакло – вода? Пресметај ги аглите при граници меѓу други материјали.

4.11. Примена на тригонометриски односи во проблемски ситуации

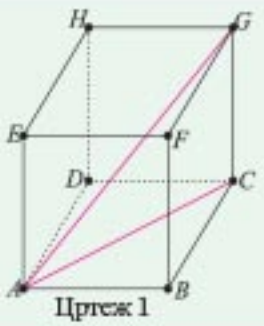
Нека е дадена рамнина и точка M која не лежи во таа рамнина. Ако од M повлечеме права која е нормална на рамнината и ако пресекот на таа права со рамнината го означиме со N, тогаш MN образува прав агол со секоја права која лежи во рамнината.

ПРИМЕР 1

Нека е дадена коцка $ABCDEFGH$ (цртеж 1), со раб $a = 5$ cm. Одреди го аголот CAG.

Работ GC е нормален на секоја права која лежи во рамнината на основата $ABCD$. Токму заради тоа триаголникот ACG е правоаголен, па ако $\measuredangle CAG = \alpha$, тогаш

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{CG}}{\overline{AC}} = \frac{5}{\sqrt{5^2+5^2}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$ што значи дека $\alpha = 45°$.

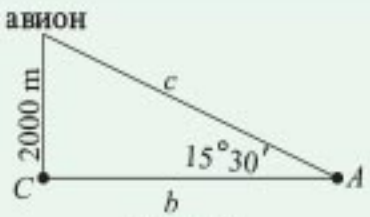


Цртеж 1

ПРИМЕР 2

Авион лета на висина од 2000 m и треба да започне со спуштање на аеродромот, под постојан агол на спуштање од $15°30'$ (цртеж 2). На кое растојание од пистата треба да започне спуштањето? Одреди го најкусото растојание на кое се наоѓа авионот од местото на кое треба да ја допре пистата.

Од правоаголниот триаголник на цртежот следува дека растојанието од пистата од кое треба да започне спуштањето на авионот е всушност должината на катетата b, па $b = 2000 \cdot \operatorname{ctg} 15°30' \approx 7211{,}8$. Најкусото растојание на кое се наоѓа авионот од местото на кое треба да ја допре пистата одговара на должината на хипотенузата c, па $c = \frac{2000}{\sin 15°30'} \approx \frac{2000}{0{,}267238} = 7483{,}96\,\text{m}$.



Цртеж 2

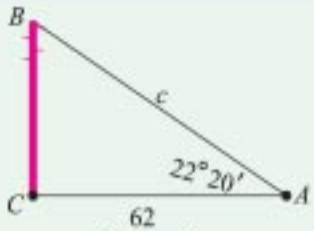
ЗАДАЧА 1

Над местото A се наоѓа авион на висина од 4000 метри. Во тој момент од него се гледа местото B под агол од 17° На колкаво растојание се наоѓа авионот од местото B и колкаво е растојанието меѓу местата A и B? Направи скица за ситуацијата!

ПРИМЕР 3

Пресметај ја висината на еден електричен столб, ако од точка која е оддалечена 62 m од неговото подножје, тој се гледа по агол од 22°20'.

Од цртеж 3 имаме
$\overline{BC} = 62 \cdot tg22°20' \approx 62 \cdot 0{,}41081 = 25{,}4702\,\text{m}$.



Цртеж 3

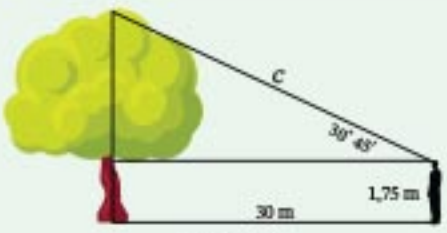
ЗАДАЧА 2

Пресметај го растојанието од точката A до врвот на столбот B (цртеж 3).

ПРИМЕР 4

Човек кој е висок 1 m и 75 cm ја гледа крошната на едно дрво под агол од 30°45'. Ако тој е оддалечен од дрвото 30 m, пресметај ја висината на дрвото. Притоа, крошната на дрвото почнува од иста висина со човекот.

Од цртеж 4 добиваме дека висината на крошната е $30 \cdot \operatorname{tg} 30°45' \approx 30 \cdot 0{,}594937 = 50{,}4255$, па висината на дрвото е $50{,}4255 + 1{,}75 = 52{,}1755$ m.



Цртеж 4

ЗАДАЧА 3

Пресметај ја оддалеченоста од главата на човекот до врвот на дрвото (цртеж 4).

ПРИМЕР 5

На брегот на една река има дрво високо 7 m, цртеж 5. Тоа се гледа под агол 23°20' од другиот брег на реката. Пресметај ја ширината на реката.

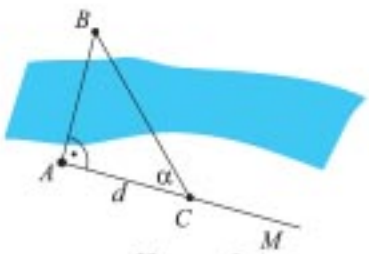
Ширината на реката е
$\frac{7}{tg23°20'} \approx \frac{7}{0{,}431358} = 16{,}2278\,\text{m}$.



Цртеж 5

ЗАДАЧА 4

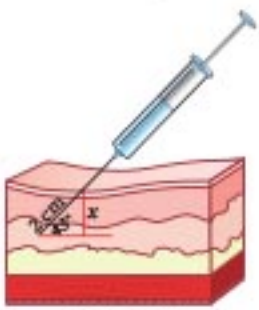
Изрази го растојанието меѓу точките A и B, кои се наоѓаат на различните страни на една река, со помош на $d = \overline{AC}$ и аголот α (цртеж 6).



Цртеж 6

ЗАДАЧА 5

На цртеж 7 е претставено аплицирање на инјекција во ткиво. Ако делот од иглата кој навлегол во ткивото е 2 cm, а аплицирањето е под агол од 45°, тогаш на која длабочина треба да се најде иглата?

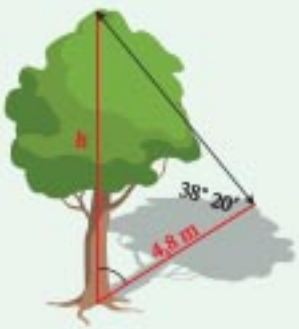


Цртеж 7

ПРИМЕР 6

Дрво има сенка долга 4,8 m кога зрак од сонцето зафаќа агол од 38°20' со површината на земјата. Одреди ја висината на дрвото.

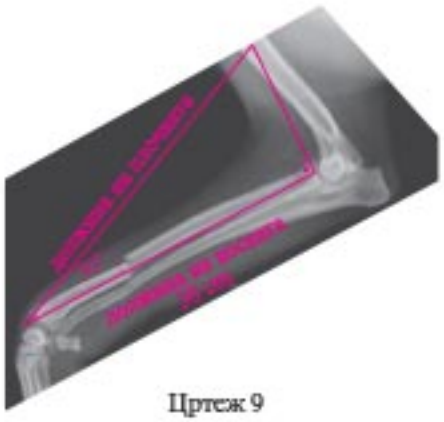
Ќе конструираме правоаголен триаголник со прав агол меѓу дрвото и површината на земјата, од каде што лесно се добива висината на дрвото е $h = 4{,}8 \cdot \text{tg}\,38°20' \approx 4{,}8 \cdot 0{,}7906 \approx 3{,}79\,\text{m}$ (Цртеж 8).



Цртеж 8

ЗАДАЧА 6

На рентгенска снимка на цртеж 9 се набљудува скршеница на коска кај куче. Должината на коската на кучето е 30 cm. Колкава треба да биде должината на плочката, која треба да се вгради, според податоците на снимката?

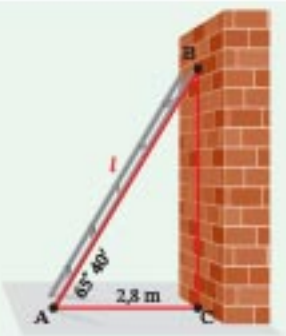


Цртеж 9

ПРИМЕР 7

Пожарникарски скали се наоѓаат на растојание од 2,8 m од ѕидот. Одреди ја должината на скалите ако аголот меѓу скалите и подот е 65°40'.

Ќе конструираме правоаголен триаголник со прав агол меѓу ѕидот и подот. Тогаш должината на скалите е $l = \frac{2{,}8}{\cos 65^0 40'} \approx \frac{2{,}8}{0{,}69879} \approx 4$ m (Цртеж 10).



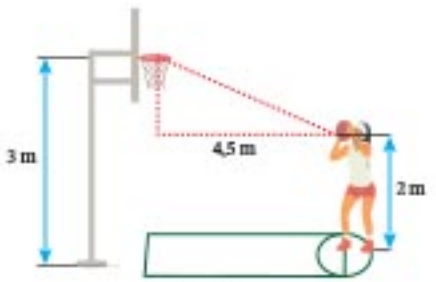
Цртеж 10

ЗАДАЧА 7

Очите на кошаркарката се 2 метри над подот и кошот е 3 метри над подот (цртеж 11).

Кошаркарката е на линијата за слободни фрлања која е на 4,5 метри од центарот на кошот.

Колкав е аголот на елевација под кој кошаркарката го гледа центарот на кошот?



Цртеж 11

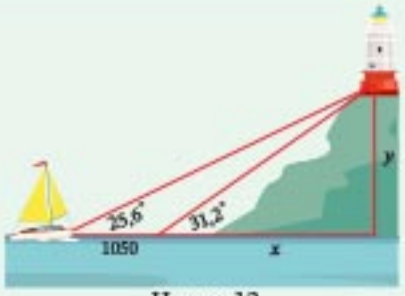
ПРИМЕР 8

Аголот под кој се гледа еден светилник од брод изнесува 25,6°. По приближувањето на бродот до копното за 1050 метри, аголот изнесувал 31,2°. На која висина е поставен светилникот, мерејќи од нивото на водата?

Да ги означиме со x растојанието на бродот (цртеж 12) до копното по приближувањето за 1050 метри и со y бараната висина на којашто е поставен светилникот, мерено од нивото на водата. Тогаш имаме дека $\operatorname{ctg} 31{,}2° = \frac{x}{y}$ и $\operatorname{ctg} 25{,}6° = \frac{1050 + x}{y}$,

од каде што наоѓаме дека $x = y \operatorname{ctg} 31{,}2^\circ = 1{,}651y$ и $y \operatorname{ctg} 25{,}6^\circ = 1050 + x$. Со замена на $x = 1{,}651y$ во втората равенка, добиваме $2{,}087y = 1050 + 1{,}651y$, односно $0{,}436y = 1050$. Според тоа, имаме дека $y = \frac{1050}{0{,}436} = 2410\,\text{m}$.

Значи, светилникот е поставен на висина од 2410 метри.

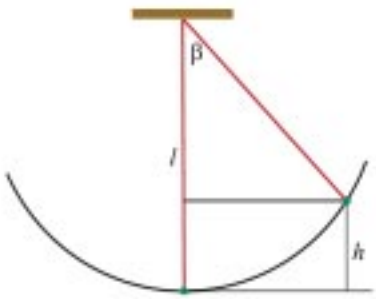


Цртеж 12

ЗАДАЧА 8

Нишало на должина 30 cm (цртеж 13) осцилира со максимален агол од 30°.

Која е висината што ја достигнува нишалото?



Цртеж 13

ПРИМЕР 9

На цртеж 10 е прикажана долга правоаголна лента од хартија, чијшто ќош се превиткува преку AC за да го достигне спротивниот раб, при што се формира агол θ. Ако ширината на лентата е w, да ја изразиме должината на превиткувањето AC преку w и θ.

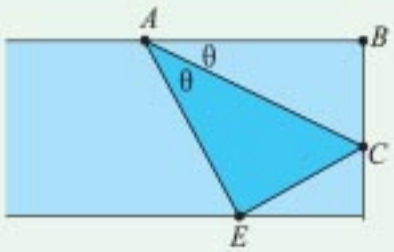
Да забележиме дека големината на аголот θ е меѓу 0° и 45°. Нека F е подножјето на нормалата спуштена од A кон спротивниот раб (цртеж 11).

Во правоаголниот триаголник AEF имаме дека $\sphericalangle AEF = 2\theta$ и $\overline{AF} = w$.

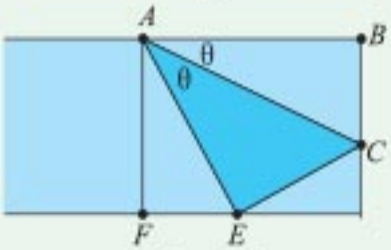
Тогаш $\overline{AF} = \overline{AE} \sin 2\theta$, од каде што следува дека $\overline{AE} = \frac{\overline{AF}}{\sin 2\theta} = \frac{w}{\sin 2\theta}$.

Во правоаголниот триаголник AEC имаме дека $\sphericalangle CAE = \sphericalangle CAB = \theta$.

Тогаш $\overline{AE} = \overline{AC} \cos\theta$ од каде што следува дека $\overline{AC} = \frac{\overline{AE}}{\cos\theta} = \frac{w}{\cos\theta \sin 2\theta}$.



Цртеж 10



Цртеж 11

ЗАДАЧА 9

Кеопсовата пирамида е правилна пирамида со висина 147 метри и со основа квадрат со страна 230 метри.

а) Пресметај го аголот што го зафаќа еден бочен раб со рамнината на основата.

б) Пресметај го аголот што го зафаќа еден бочен раб со еден основен раб кои се сечат во исто теме

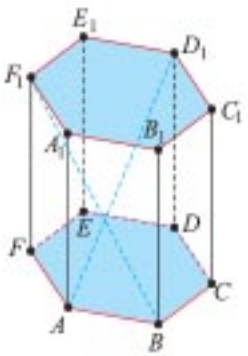
в) Пресметај го аголот меѓу два бочни раба.

ЗАДАЧА 10

При сончев ден просечната произведена енергија од квадратен метар сончеви панели е 0,8 kWh. Покривот на куќата на Алит има форма на рамнокрак триаголник со краци од 12 метри и агол од 72 степени меѓу нив. Определи колку енергија во просек може да произведе Алит доколку целиот покрив го прекрие со сончеви панели?

ЗАДАЧА 11

Еден резервоар има форма на правилна шестаголна призма со основен раб 2 m (цртеж 16). Во него се поставени потпорните греди AD_1 и BF_1. Гредата AD_1 зафаќа агол од 32° со шестаголникот на основата. Најди ги должините на гредите AD_1 и BF_1.



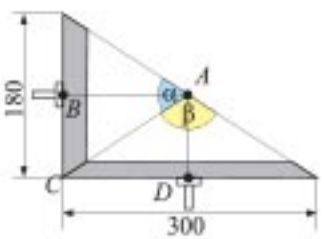
Цртеж 16

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. На врвот на една фабрика со висина $H = 140$ m се наоѓа оџак. Од точката A, која е на растојание 100 m од фабриката, оџакот се гледа под агол $\alpha = 56°$. Пресметај ја висината на оџакот.

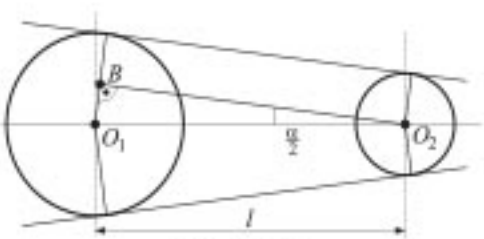
2. Два столба со висина 20 m и 17 m се поставени еден од друг на растојание од 50 m.
   а) Пресметај ја должината на електричниот кабел што е поставен на врвовите на двата столба,
   б) Пресметај ги аглите кои ги зафаќа кабелот со столбовите.

3. Надворешните дијаметри на пар конусни запчаници се 180 mm и 300 mm. Пресметај ги аглите при врвот на секој конусен запчаник т.е. аглите α и β на цртеж 17.



Цртеж 17

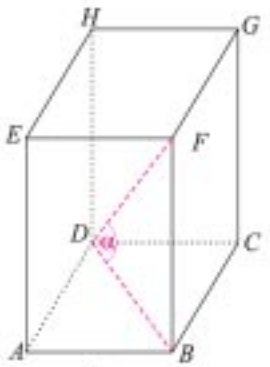
4. Пресметај го аголот на ремењот од двата ременици, чии дијаметри се 2m и 1,2 m, ако нивното централно растојание е $l = 3$m (цртеж 18).



Цртеж 18

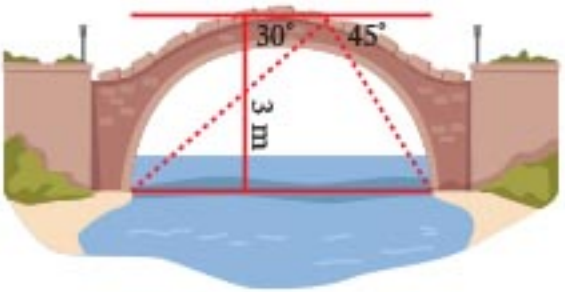
5. Од подножјето на една планина до нејзиниот врв под агол од $\alpha = 46°30'$, во однос на површината на земјата, праволиниски е поставена жичарница со должина од 1500 m. Пресметај ја висината на планината.

6. Одреди ја големината на аголот α, ако *ABCDEFGH* е правилна четиристрана призма (цртеж 19) со основен раб $a = 7$ cm и висина $h = 12$ cm.



Цртеж 19

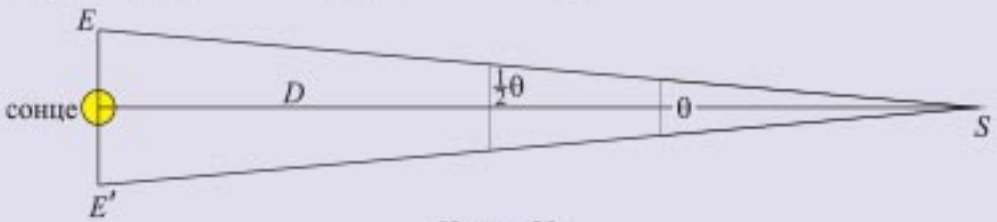
7. Од една точка на мост едниот брег се гледа под агол од 30°, а другиот под агол од 45°. Ако мостот е висок 3 m од нивото на водата, најди ја ширината на реката (цртеж 20).



Цртеж 20

ИСТРАЖУВАЊЕ

Определувањето на растојание меѓу Земјата и некоја ѕвезда е дадено со формулата $D = \frac{b}{\operatorname{tg}\theta}$ каде што D е растојанието, b е основното растојание вообичаено два пати по растојанието од Земјата до Сонцето, приближно 300 000 000 km, и θ е разликата во аглите под кои се гледа ѕвездата од различните точки на основното растојание. Најблиската ѕвезда, различна од Сонцето до Земјата е Проксима Кентаури за која големината на θ е 0,768 секунди. Обиди се да го определиш растојанието од Земјата до Проксима Кентаури во километри и во светлосни години, една светлосна година е $9.46 \cdot 10^{12}$ km? Истражи ги овие параметри за други ѕвезди различни од Проксима Кентаури.

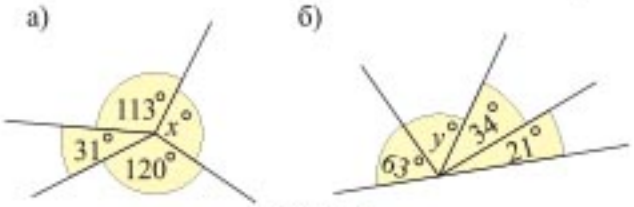


Цртеж 21

4.12. Агли на трансверзалата на две прави

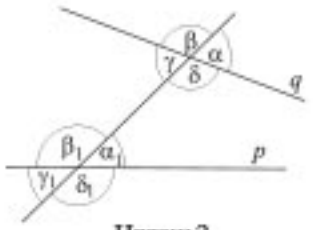
ЗАДАЧА 1

Одреди ја големината на непознатиот агол, според податоците од цртеж 1:



Цртеж 1

Ако две различни прави p и q (цртеж 2), кои лежат во една рамнина се пресечат со трета права a, која уште се вика **трансверзала**, се образуваат аглите $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и δ_1, кои се викаат и **агли на трансверзалата**.



Цртеж 2

Кои од следниве тврдења за паровите агли на трансверзалата се точни?

а) α и β се надворешни агли, б) α_1 и γ се наизменични агли

в) α_1 и δ се согласни агли, г) α и γ_1 се спротивни агли

д) α_1 и β_1 се внатрешни агли

Аглите α, β, γ_1 и δ_1 се **надворешни**, а аглите $\alpha_1, \beta_1, \gamma$ и δ се **внатрешни** агли.

име на аглите	дефиниција	ознаки на цртеж 2
Согласни агли	Еден внатрешен и еден надворешен агол од иста страна на трансверзалата кои немаат заедничко теме	α и α_1, β и β_1, γ и γ_1, δ и δ_1
Наизменични агли	Два надворешни или два внатрешни агли од различна страна на трансверзалата кои немаат заедничко теме	α и γ_1, β и δ_1, δ и β_1, γ и α_1
Спротивни агли	Два внатрешни или два надворешни агли од иста страна на трансверзалата кои немаат заедничко теме	α и δ_1, β и γ_1, γ и β_1, δ и α_1

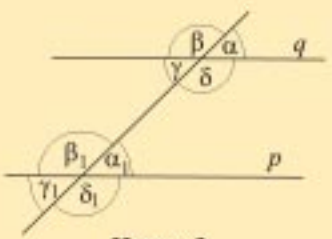


Ако две паралелни прави се пресечат со трета права, тогаш:

а) согласните агли се еднакви,

б) наизменичните агли се еднакви,

в) спротивните агли се суплементни (цртеж 3).



Цртеж 3

Аглите што имаат заеднички крак и теме, а нивните области лежат на различни страни од кракот, се викаат **соседни агли** (цртеж 4). Два соседни агли што образуваат рамен агол се викаат **напоредни агли** (цртеж 5).



Цртеж 4



Цртеж 5

Збирот на два напоредни агли изнесува 180°. Напоредните агли се суплементни, но два суплементни агли не мора да се напоредни.

Два агли кои имаат заедничко теме, а нивните краци образуваат две прави, се викаат **накрсни агли**.

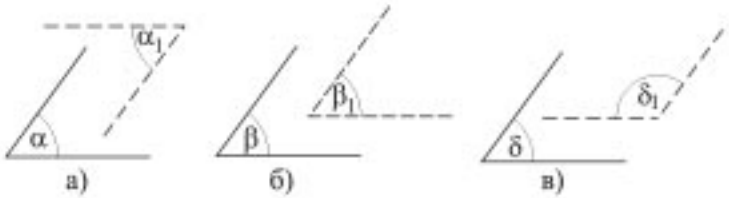
Накрсните агли се еднакви меѓу себе.

На цртеж 6 се прикажани **агли со паралелни краци:**

а) α и α_1 во спротивна насока,

б) β и β_1 во иста насока,

в) δ и δ_1 имаат еден крак во иста, а друг во спротивна насока.

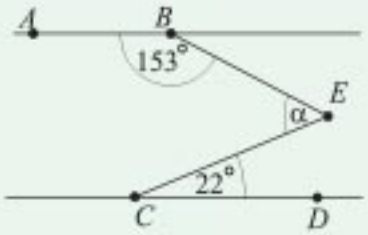


Цртеж 6

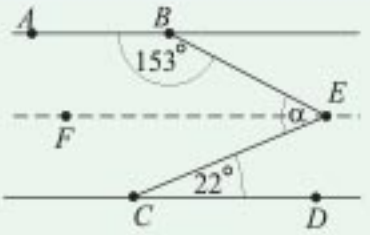
Аглите со паралелни краци во спротивна или во иста насока се еднакви меѓу себе, а аглите со еден крак во иста, а друг во спротивна насока се суплементни.

ПРИМЕР 1

Правите AB и CD на цртеж 7 се паралелни. Според податоците на цртежот одреди ја големината на $\alpha = \measuredangle BEC$.



Цртеж 7

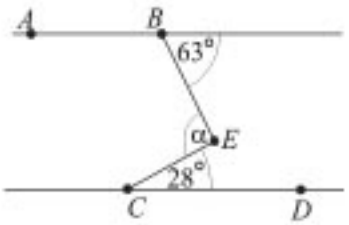


Цртеж 8

Повлечи низ E права паралелна со AB и CD и избери на таа права точка F различна од E. Тогаш $\measuredangle FEC = \measuredangle DCE = 22°$, како наизменични и $\measuredangle BEF + \measuredangle ABE = 180°$ т.е. $\measuredangle BEF = 27°$, како спротивни агли (цртеж 8). Затоа $\alpha = 27° + 22° = 49°$

ЗАДАЧА 1

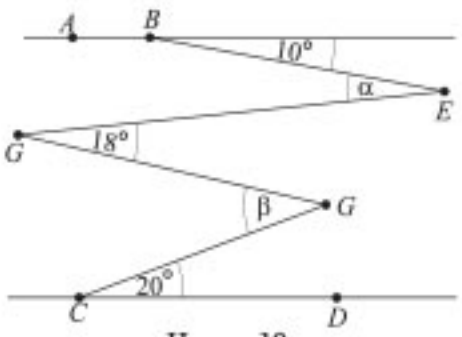
Правите AB и CD на цртеж 9 се паралелни. Одреди ја големината на аголот α, според податоците од цртежот.



Цртеж 9

ЗАДАЧА 2

Правите AB и CD на цртеж 10 се паралелни. Одреди ја големината на аглите α и β, според податоците од цртежот.



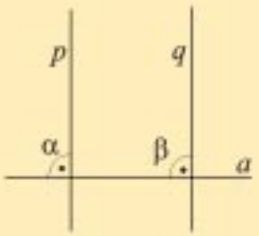
Цртеж 10

АКТИВНОСТ

Со помош на динамички геометриски софтвер конструирај две паралелни прави и пресметувај ги аглите кај слични задачи како задачите 1 и 2. Обиди се да изведеш правило.

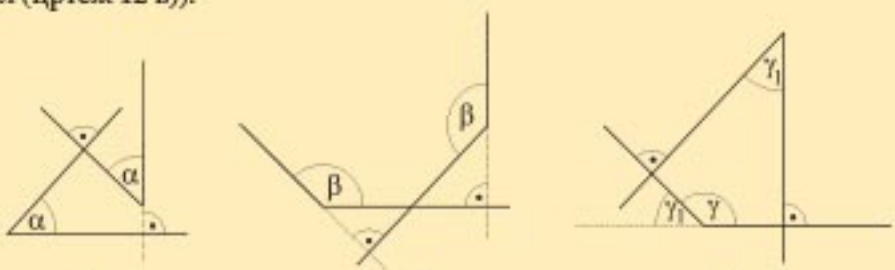
Дали истото правило ќе важи за посложена ситуација, на пример кога меѓу двете паралелни прави има три или повеќе точки поврзани со отсечки кои образуваат непознати агли?

Ако p и q се две паралелни прави и ако p е нормална на правата a, т.е. $p \perp a$, тогаш $q \perp a$ (цртеж 11).



Цртеж 11

Два агла со нормални краци меѓу себе се еднакви, ако и двата се остри (цртеж 12 а)) или и двата се тапи агли (цртеж 12 б)), а суплементни ако едниот е остар, а другиот тап агол (цртеж 12 в)).



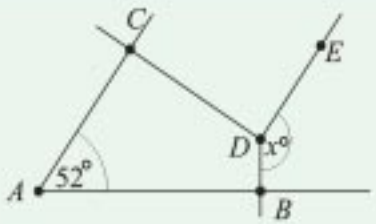
а) б) в)

Цртеж 12

ПРИМЕР 2

Нека $AC \parallel DE$, $AC \perp CD$ и $AB \perp BD$(цртеж 13). Ако $\measuredangle BAC = 52°$, тогаш колку е $\measuredangle BDE$?

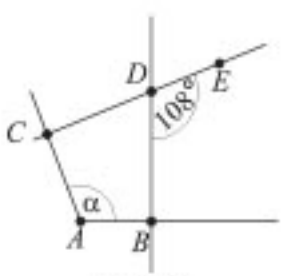
Бидејќи $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle CDB$ се агли со заемно нормални краци и едниот е тап, а другиот остар агол, значи дека се суплементни т.е. $\measuredangle CDB = 180° - 52° = 128°$.
Од тоа што $AC \parallel DE$ и $AC \perp CD$ следува дека $\measuredangle EDC = 90°$. Конечно $90° + x° + 128° = 360°$, од каде што $x°$=142°.



Цртеж 13

ЗАДАЧА 3

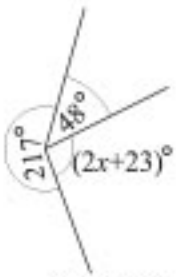
Нека $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle CDB$ се агли со заемно нормални краци (цртеж 14) . Одреди ја големината на аголот α, ако $\measuredangle BDE = 108°$.



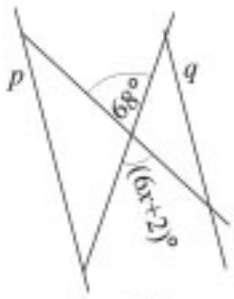
Цртеж 14

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Одреди ја големината на x според вредностите дадени на цртежите 15, 16 и 17.

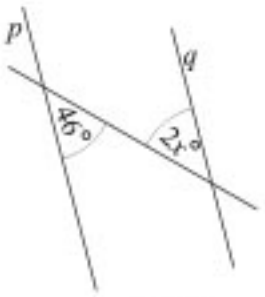


Цртеж 15



$p \parallel q$

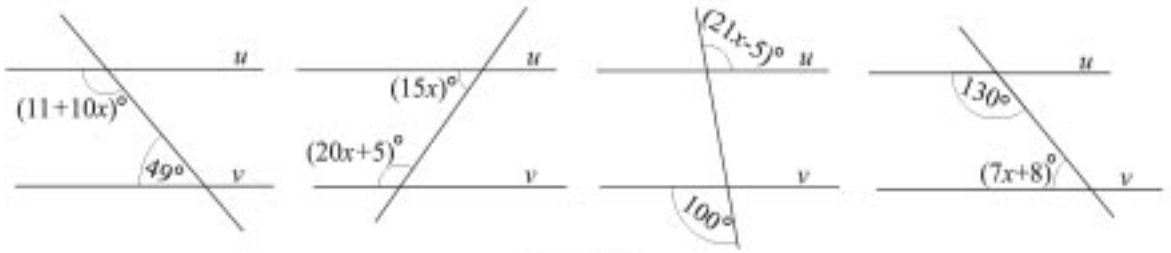
Цртеж 16



$p \parallel q$

Цртеж 17

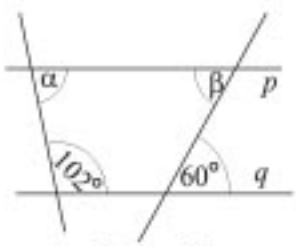
2. Ако правите u и v се паралелни, одреди ја големината на бројот означен со x на секој од цртежите на цртеж 18:



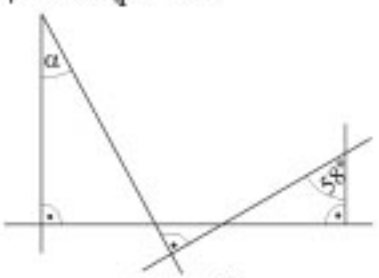
Цртеж 18

3. Одреди ги аглите α и β според цртеж 19.

4. Одреди го аголот α според податоците на цртеж 20.



Цртеж 19

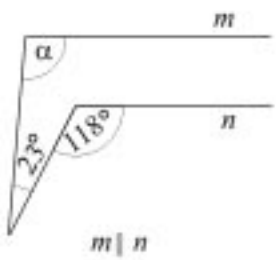


Цртеж 20

5. Одреди го аголот α според податоците на

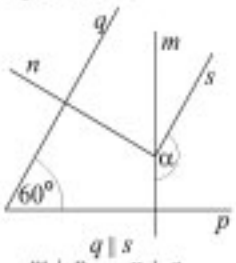
а) цртеж 21

б) цртеж 22.



$m \parallel n$

Цртеж 21



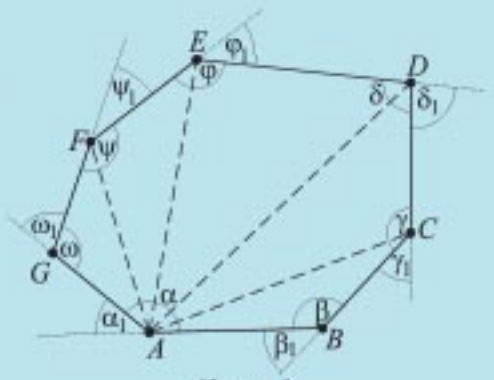
$q \parallel s$

$m \perp p \quad n \perp q$

Цртеж 22

4.13. Многуаголник

Ако сите точки од отсечките, чии краеви лежат на многуаголникот се точки од тој многуаголник, тогаш тој многуаголник се вика **конвексен многуаголник**, во спротивно се вика, **конкавен многуаголник**. Отсечката чии крајни точки се кои било две несоседни темиња на многуаголникот е **дијагонала на многуаголникот**, (цртеж 1).



Цртеж 1

ЗАДАЧА 1

Нацртај еден петаголник и пресметај колку дијагонали можат да се повлечат од едно теме на тој петаголник? Запиши правило со чија помош ќе пресметуваш за секој многуаголник.

Бројот на сите дијагонали во еден многуаголник се пресметува со формулата $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$, каде што n го означува бројот на страни на многуаголникот.

ЗАДАЧА 2

Пресметај го бројот на сите дијагонали кај: а) седумаголник, б) осумаголник, в) дваесетаголник.

Секои две соседни страни на многуаголникот образуваат агол кој е **внатрешен агол** на многуаголникот. На цртеж 1 тоа се аглите: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \phi, \psi, \omega$. Бројот на аглите на многуаголникот е еднаков со бројот на неговите страни, односно темиња. Дијагоналите повлечени од едно теме на многуаголникот го делат многуаголникот на $(n-2)$ триаголници, па според тоа, збирот на сите внатрешни агли во многуаголникот е $C_n = (n-2) \cdot 180°$. Секој напореден агол со внатрешниот агол кај многуаголникот е **надворешен агол** на многуаголникот. На цртеж 1 тоа се аглите: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \phi_1, \psi_1, \omega_1$. Збирот на надворешните агли кај многуаголникот е: $n \cdot 180° - C_n = n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 360°$.

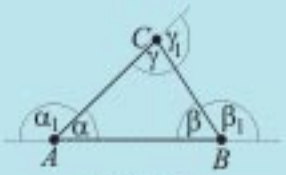
ЗАДАЧА 3

Пресметај го збирот на внатрешните агли кај:

а) четириаголник; б) шестаголник; в) десетаголник.

Триаголник

Аглите што се напоредни со внатрешните агли на триаголникот се **надворешни** агли на триаголникот (цртеж 2, аглите α_1, β_1 и γ_1 се надворешни агли во ΔABC).

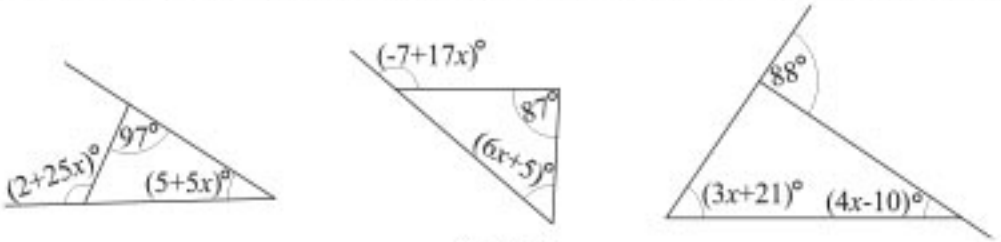


Цртеж 2

Секој надворешен агол во триаголник е еднаков на збирот од два несоседни внатрешни агли. Збирот на надворешните агли на триаголникот изнесува 360°.

ЗАДАЧА 4

Одреди ја вредноста на непознатиот агол $x°$, според податоците на секој од цртежите на цртеж 3

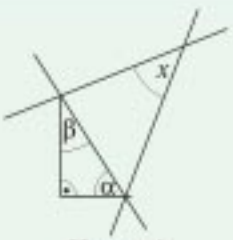


Цртеж 3

ПРИМЕР 1

Симетралите на надворешните агли на аглите од хипотенузата на правоаголен триаголник се сечат под агол од 45°. Докажи!

Ако ги означиме двата агли на хипотенузата со α и β (цртеж 4), тогаш симетралите на надворешните агли и хипотенузата образуваат триаголник со внатрешни агли $90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2} + x° = 180°$. Од овде следува дека $x° = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$.



Цртеж 4

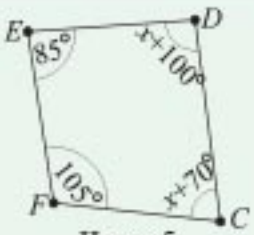
Четириаголник

Збирот од внатрешните агли кај четириаголник е 360°. Збирот од надворешните агли кај четириаголник е 360°.

ПРИМЕР 2

Одреди ја големината на аголот во темето D на четириаголникот на цртежот 5.

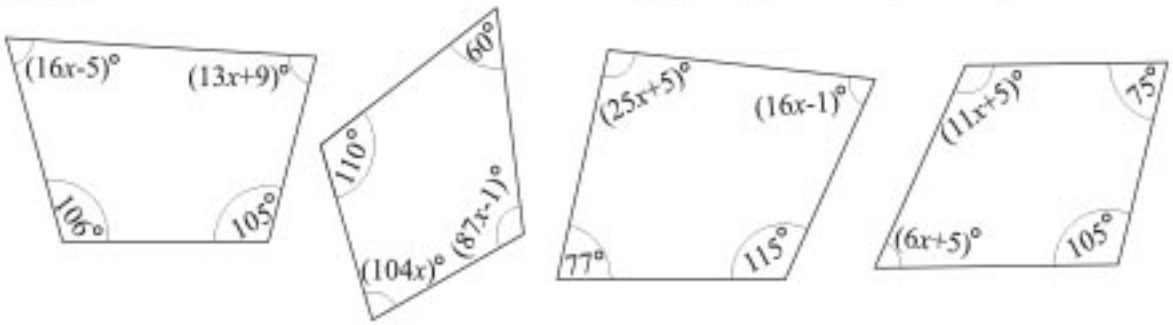
Збирот на внатрешните агли е 360°,
па $105° + x + 70° + x + 100° + 85° = 360°$
од каде што се добива дека $x = 0°$,
што значи дека аголот во темето D
изнесува 100°.



Цртеж 5

ЗАДАЧА 5

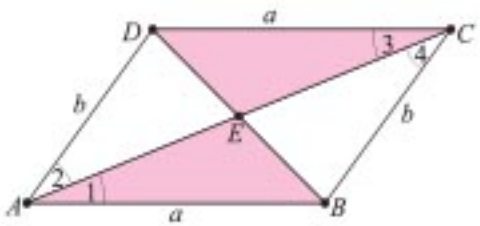
Одреди ја големината на непознатите агли во секој од четириаголниците на цртеж 6.



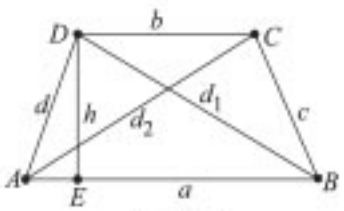
Цртеж 6

Според бројот на парови паралелни страни, четириаголниците ги делиме на:

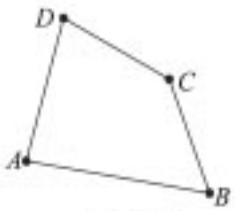
- **паралелограми**, кои имаат два пара паралелни страни и за нив важи дека: спротивните страни се еднакви, спротивните агли се еднакви, соседните агли се суплементни и дијагоналите се преполовуваат со пресечната точка - цртеж 7
- **трапези**, кои имаат еден пар паралелни страни и за нив важи дека: соседните агли, кои лежат на краците, се суплементни - цртеж 8
- **трапезоиди**, кои немаат ниту еден пар паралелни страни - цртеж 9



Цртеж 7



Цртеж 8



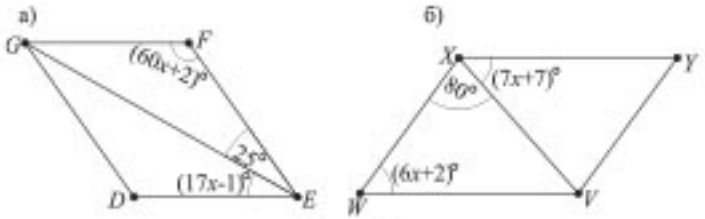
Цртеж 9

ЗАДАЧА 6

Одреди ја големината на непознатиот агол во паралелограмот.

а) Аголот GFE на цртежот 10 а)

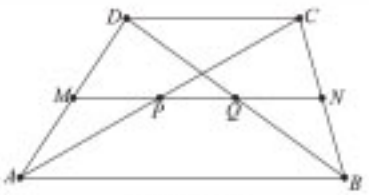
б) аголот WVY на цртежот 10 б)



Цртеж 10

ПРИМЕР 3

Средната линија MN кај трапезот $ABCD$ $(\overline{AB} > \overline{CD})$ ја сече дијагоналата AC во точка P, а дијагоналата BD во точка Q. Докажи дека $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} - \overline{CD}\right)$.



Цртеж 11

Бидејќи MP е средна линија на ΔCDA, следува дека $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{CD}$. Од тоа што MQ е средна линија во ΔABD следува дека $\overline{MQ} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Значи, $\overline{PQ} = \overline{MQ} - \overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} - \overline{CD}\right)$.

Правилен многуаголник

Еден многуаголник се нарекува **правилен** ако сите негови страни се еднакви и сите внатрешни агли се еднакви.

Забелешка. Правилен триаголник е рамностраниот триаголник, а правилен четириаголник е квадратот. Ромбот , кој не е квадрат, не е правилен четириаголник, бидејќи внатрешните агли не се еднакви.

ПРИМЕР 4

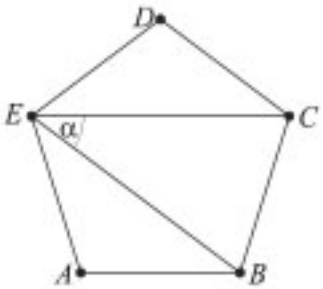
Познато е дека односот на еден надворешен и еден внатрешен агол во исто теме кај правилен n-аголник изнесува 1:14. Одреди го вкупниот број на дијагонали во тој многуаголник.

Знаеме дека еден внатрешен и еден надворешен агол во исто теме кај правилниот многуаголник се суплементни што значи дека ако ги означиме со α и β, соодветно, се добива дека $\alpha + \beta = 180°$ и од $\beta : \alpha = 1 : 14$, следува дека $\alpha = 14\beta$, од каде што $\beta = 12°$. Значи $n = \frac{360°}{12°} = 30$, па вкупниот број на дијагоналите кај правилниот триесетаголник изнесува $\frac{30 \cdot (30-3)}{2} = 405$.

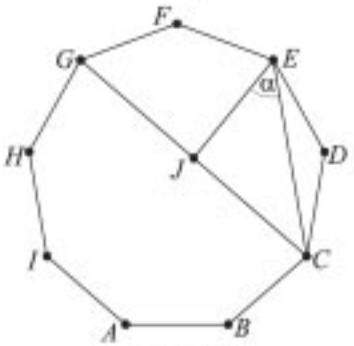
Големината на еден надворешен агол во правилен n-аголник изнесува $\frac{360°}{n}$, а големината на еден внатрешен агол е $\frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

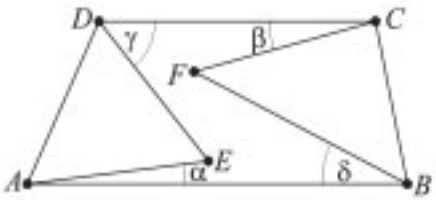
1. Во кој многуаголник збирот на внатрешните агли е: а) 2700°, б) 4320°, в) 5040°?
2. Во еден многуаголник може да се повлечат вкупно 14 дијагонали. Кој е тој многуаголник?
3. Одреди ја големината на непознатиот агол α, ако *ABCDE* е правилен петаголник (цртеж 12).



Цртеж 12

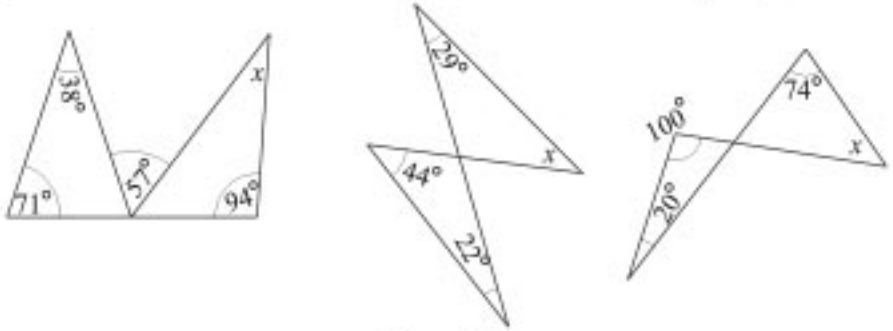


Цртеж 13



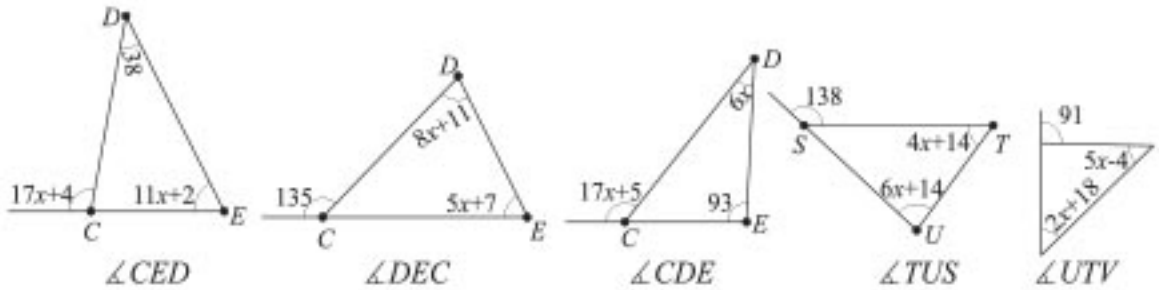
Цртеж 14

4. Одреди ја големината на непознатиот агол α, ако *ABCDEFGHI* е правилен деветаголник и *EJ* ⊥ *CG* (цртеж 13).
5. Во трапезот *ABCD* познато е дека α = 7°, β = 15°, γ = 51° и δ = 27°. Одреди ја големината на ∢ BFC и ∢ DEA (цртеж 14).
6. Одреди ја големината на непознатиот агол, во степени, на секој од цртежите на цртеж 15:



Цртеж 15

7. Одреди ја големината на непознатиот агол *x*, ако сите агли се дадени во степени (цртеж 16):



Цртеж 16

8. Аголот при врвот на рамнокрак триаголник е за 30° поголем од аголот при основата. Одреди ги внатрешните и надворешните агли на триаголникот.

9. Симетралата на надворешниот агол во темето C, кај триаголникот ABC, ја сече правата AB под агол од 45°. Аголот ABC е 35°. Одреди ги аглите на триаголникот.

10. Симетралата на аголот меѓу страната и дијагоналата кај ромб ја сече другата страна на ромбот под агол од 72°. Одреди ги аглите на ромбот.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Направи истражување за аглите кои најчесто се користат во градежништвото, архитектурата и автомобилската индустрија.

4.14. Кружница и круг

АКТИВНОСТ

„Лондонското око" е знаменитост во Лондон, која е всушност ротирачко тркало со дијаметар од 120 метри (Слика 1). На него се прикачени 32 кабини кои се издигнуваат на максимална висина од 135 метри над Лондон. Одреди под кој агол се наоѓаат две соседни кабини од центарот на тркалото? Обиди се да откриеш од која кабина означениот кружен лак $\overset{\frown}{AB}$, на слика 2, ќе се гледа под најголем агол. Искористи геометриски софтвер за да ги провериш претпоставките.



Слика 1

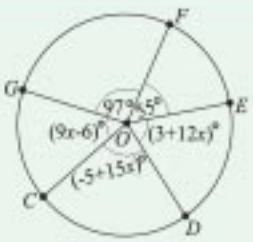


Слика 2

ПРИМЕР 1

Одреди ја големината на $\measuredangle COG$ според податоците од цртежот 1.

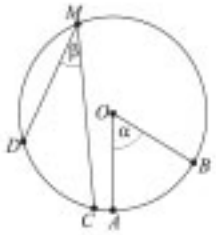
Од тоа што $(9x)° - 6° - 5° + (15x)° + 3° + (12x)° + 55° + 97° = 360°$,
следува дека $x = 6°$ од каде што се добива дека $\measuredangle COG = 9 \cdot 6° - 6° = 48°$.



Цртеж 1

ЗАДАЧА 1

На цртеж 2 претставени се аглите α и β. Потсети се како се вика аголот α, а како аголот β? Какви се два централни агли во една кружница на кои им одговараат еднакви кружни лаци? Дали важи обратното?



Цртеж 2

Сите периферни агли во една кружница над ист кружен лак меѓусебно се еднакви (цртеж 3).

Секој периферен агол над полукружницата е прав агол **(Талесова теорема)** (цртеж 4).


Цртеж 3



Цртеж 4

ЗАДАЧА 2

Ако периферниот агол се зголеми два пати, како ќе се промени централниот агол?

Секој периферен агол во една кружница е еднаков на половината од централниот агол, над ист кружен лак.

ПРИМЕР 2

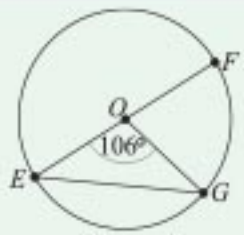
Збирот на еден централен агол и периферниот агол над еден ист лак изнесува 210°. Колкав е централниот агол?

Ако го означиме централниот агол со α, тогаш $\alpha + \frac{\alpha}{2} = 210^\circ$, па $\alpha = 140^\circ$.

ПРИМЕР 3

Одреди ја големината $\measuredangle GEF$, ако $\measuredangle EOG = 106^\circ$ (цртеж 5).

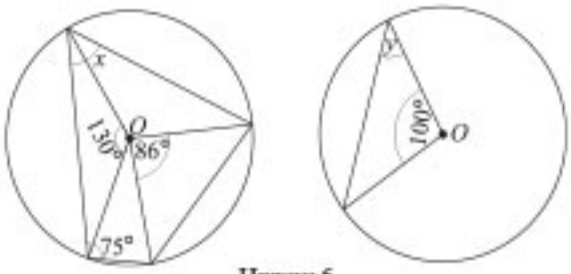
Бидејќи $\measuredangle EOF = 180^\circ$, следува дека $\measuredangle GOF = 74^\circ$, па $\measuredangle GEF = \left(\frac{74}{2}\right)^\circ = 37^\circ$.



Цртеж 5

ЗАДАЧА 3

Одреди ги периферните агли x и y, во степени, според податоците од цртеж 6.



Цртеж 6

ПРИМЕР 4

Одреди го непознатиот агол x, во степени, според податоците на цртеж 7.

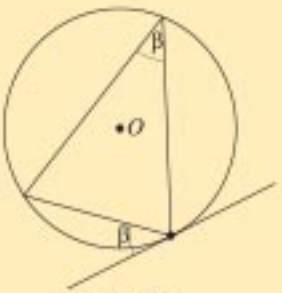
$\measuredangle CFB = \measuredangle CAB$ како периферни агли над ист кружен лак. Од Талесовата теорема следува дека $\measuredangle BCA = 90° - 56° = 34°$.



Цртеж 7



Аголот меѓу тетивата на кружницата и тангентата, повлечена во една од крајните точки на тетивата, е еднаков со периферниот агол што одговара на таа тетива (цртеж 8).



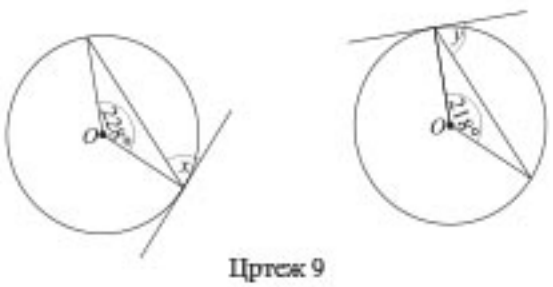
Цртеж 8

АКТИВНОСТ

Обиди се да го докажеш претходното својство со тоа што ќе докажеш дека аголот меѓу тетивата и тангентата во една од крајните точки на тетивата е еднаков на половина од централниот агол кој одговара на таа тетива.

ЗАДАЧА 4

Одреди ги непознатите агли x и y, според податоците на цртежот 9

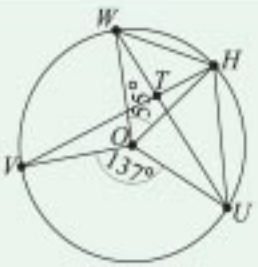


Цртеж 9

ПРИМЕР 5

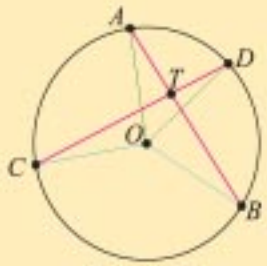
Одреди ја големината на $\measuredangle VTU$ ако е познато дека $\measuredangle VOU = 137°$ и $\measuredangle HOW = 55°$ (Цртеж 10).

Имено, $\measuredangle WUH = \frac{\measuredangle WOH}{2} = \left(\frac{55}{2}\right)^\circ$ и $\measuredangle VHU = \frac{\measuredangle VOU}{2} = \left(\frac{137}{2}\right)^\circ$. Па $\measuredangle VTU$ е надворешен агол за ΔTUH, од каде што следува дека $\measuredangle VTU = \left(\frac{55}{2}\right)^\circ + \left(\frac{137}{2}\right)^\circ$.



Цртеж 10

Аголот меѓу две тетиви, кои се сечат во внатрешноста на кругот (цртеж 11), е еднаков на полузбирот од соодветните централни агли, т.е. ако тетивите AB и CD се сечат во точката T, тогаш $\measuredangle CTB = \frac{\measuredangle COB}{2} + \frac{\measuredangle AOD}{2}$ и $\measuredangle ATC = \frac{\measuredangle AOC}{2} + \frac{\measuredangle DOB}{2}$.

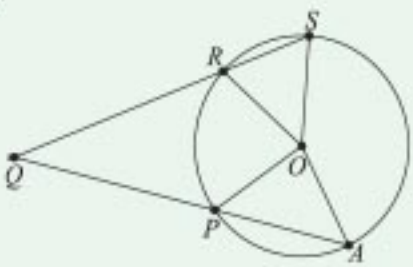


Цртеж 11

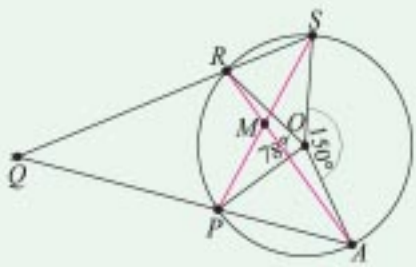
ПРИМЕР 7

Одреди ја големината на $\measuredangle PQR$, ако е познато дека $\measuredangle POR = 78°$ и $\measuredangle AOS = 150°$ (цртеж 12).

Имаме дека $\measuredangle ARS = \left(\frac{150}{2}\right)^\circ = \measuredangle APS$ и $\measuredangle PSR = \left(\frac{78}{2}\right)^\circ = \measuredangle PAR$, па $\measuredangle PMR = \left(\frac{78}{2}\right)^\circ + \left(\frac{150}{2}\right)^\circ$ (цртеж 13).



Цртеж 12



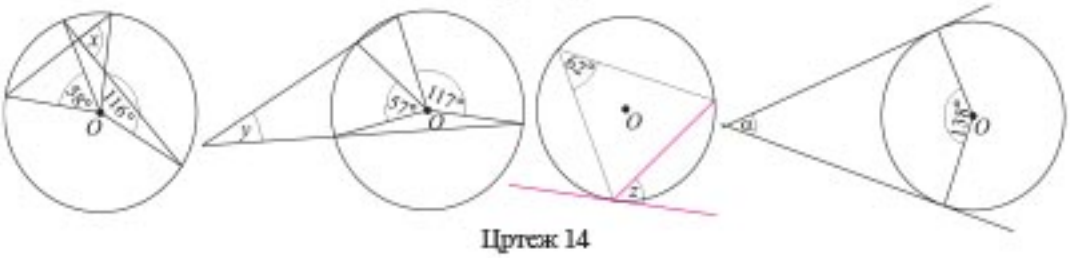
Цртеж 13

Тогаш $\measuredangle PQR = 360° - \left(\frac{78}{2}\right)^\circ - \left(\frac{150}{2}\right)^\circ - 2\left(180° - \left(\frac{150}{2}\right)^\circ\right) = \left(\frac{150}{2}\right)^\circ - \left(\frac{78}{2}\right)^\circ$.

Аголот меѓу две секанти повлечени од точка која е надворешна за кружницата (цртеж 12) е еднаков на полуразликата од големината на соодветните централни агли, т.е. $\measuredangle AQS = \frac{\measuredangle AOS}{2} - \frac{\measuredangle POR}{2}$.

ЗАДАЧА 5

Одреди го непознатиот агол, во степени, според цртежот 14:



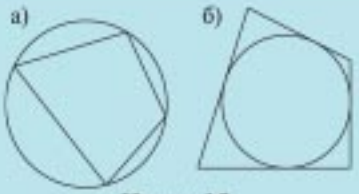
Цртеж 14

ЗАДАЧА 6

Докажи дека за радиусот на впишаната кружница во правоаголен триаголник со катети a и b и хипотенуза c, важи $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Тетивни и тангентни четириаголници

Четириаголникот чии страни се тетиви на иста кружница е **тетивен** четириаголник (цртеж 15 а)), а четириаголник чии страни се тангенти на една кружница е **тангентен** четириаголник (цртеж 15 б)).



Цртеж 15

Спротивните агли во тетивниот четириаголник се суплементни. Збировите од должините на спротивните страни во тангентниот четириаголник се еднакви.

Забелешка. Правоаголникот, квадратот и рамнокракиот трапез се примери на тетивни четириаголници. Ромбот, квадратот и делтоидот се примери на тангентни четириаголници.

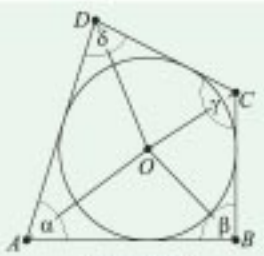
ПРИМЕР 8

Даден е тангентен четириаголник $ABCD$. Нека O е центарот на впишаната кружница. Докажи дека $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180°$ (Цртеж 16).

Бидејќи $ABCD$ е тангентен четириаголник, правите AO, BO, CO и DO се симетрали на внатрешните агли, па

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}$$

$$= 360 - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 360° - 180° = 180°$$



Цртеж 16

Во секој правилен многуаголник може да се впише кружница. Околу секој правилен многуаголник може да се опише кружница. Центрите на впишаната и опишаната кружница се совпаѓаат, и со кои било две соседни темиња од многуаголникот формираат **карактеристичен триаголник**.

ПРИМЕР 9

Одреди го радиусот на впишаната кружница r и радиусот на опишаната кружница R во правилен шестаголник со страна $a = 10$ cm.

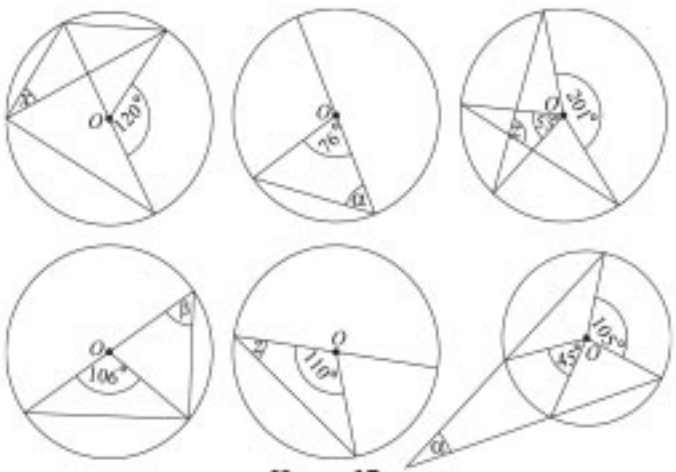
Карактеристичниот триаголник кај правилниот шестаголник е рамнокрак триаголник со агол при врвот од $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ т.е. тој е рамностран триаголник. Радиусот на впишаната кружница се совпаѓа со висината на рамностран триаголник, па $r = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm. Радиусот на опишаната кружница се совпаѓа со страната па $R = a = 10$ cm.

Радиусот на впишаната кружница r кај правилен n-аголник со страна a се пресметува со $r = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$, а радиусот на опишаната кружница R се пресметува со

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}.$$

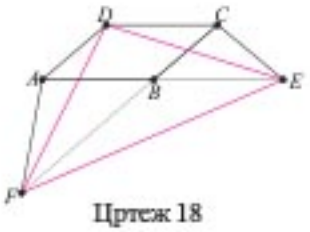
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Периферниот агол над еден лак изнесува 36°. Колкав дел од кружницата му одговара на тој лак?
2. Колкав периферен агол одговара на кружен лак кој е еднаков на $\frac{1}{20}$ дел од кружницата?
3. Една тетива ја дели кружницата на два лака кои се однесуваат како 3:5. Колкави централни агли одговараат на лаковите?
4. Еден остар агол во правоаголен триаголник изнесува 32°. Под кој агол се гледа секоја од катетите на тој триаголник, од центарот на опишаната кружница?
5. Одреди ја големината на непознатиот агол во степени, според податоците на секој од цртежите на цртежот 17!



Цртеж 17

6. Нека $ABCD$ е паралелограм (цртеж 18). Точките E и F лежат на правите AB и BC, соодветно така што триаголниците AFB и CBE се рамнокраки ($\overline{AF} = \overline{AB}$ и $\overline{BC} = \overline{CE}$). Докажи дека триаголникот DFE е исто така рамнокрак.



Цртеж 18

ИСТРАЖУВАЊЕ

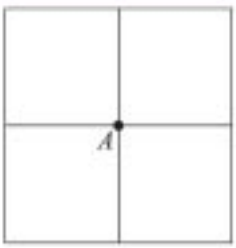
Во геометриски софтвер нацртај кружница со произволен радиус. Потоа во неа впиши правоаголен триаголник ABC. Од темето на правиот агол C спушти ја висината CD кон хипотенузата AB. Разгледај ги плоштините на правоаголникот со страни AD и BD и квадратот со страна CD.

Што забележуваш?

4.15. Препокривање на дадена површина во рамнина

ПРИМЕР 1

Во произволна точка A од рамнината можеш да ставиш точно 4 квадрати, како на цртеж 1, бидејќи секој внатрешен агол на квадратот изнесува $90°$, па $360° = 4 \cdot 90°$.



Цртеж 1

ЗАДАЧА 1

Колку рамнокраки правоаголни триаголници треба да ставиш еден до друг, со заедничко теме, така што ниту еден од нив нема да се препокрива со друг, и меѓу нив нема да има празнини? Реши ја задачата со помош на геометриски софтвер, каде што лесно ќе креираш копии од еден триаголник и ќе вршиш транслација и ротација.

ЗАДАЧА 2

Обиди се да одредиш колку рамностран триаголници со заедничко теме треба да поставиш во произволна точка, така што триаголниците ќе се допираат без да останат празнини, т.е. да добиеш збир на внатрешните агли кои се допираат во таа точка, кој е еднаков на $360°$. Триаголниците опишани погоре нема да се препокријат еден со друг и темето на ниту еден од триаголниците нема да лежи на некоја од страните на другите триаголници.

ЗАДАЧА 3

Колку правилни шестаголници можеш да поставиш во произволна точка од рамнината, така што шестаголниците ќе се допираат без да останат празнини и нема да се преклопуваат? Образложи го одговорот! Искористи геометриски софтвер за да ја провериш твојата претпоставка.

Под **препокривање на дадена површина со 2Д-форма** подразбираме кога идентични копии од 2Д-формата ја покриваат целата површина без празнини и преклопувања.
Во природата препокривање се забележува кај саќето во кошницата кај пчелите. Тоа е пример на препокривање со помош на правилни шестаголници (слика 1).


Слика 1

Препокривањето може да биде:

- правилно
- полуправилно
- неправилно

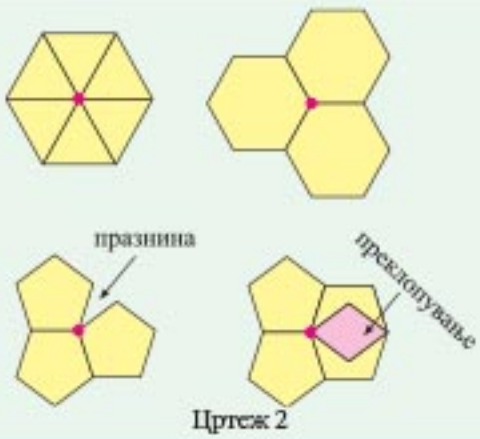
Кај правилното препокривање, во една точка од рамнината се поставени k правилни n-аголници. Збирот на внатрешните агли од n-аголниците треба да е полн агол, т.е. $k \cdot \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = 360^0$, од каде што со средување се добива равенката $\frac{2}{k} + \frac{2}{n} = 1$. Решенијата на оваа равенка треба да се природни броеви. Притоа $k > 2$ и $n > 2$.

ПРИМЕР 2

Во следнава табела се дадени неколку правилни n-аголници, чиј внатрешен агол во едно теме е природен број. Со помош на оваа табела обиди се да одредиш како ќе се направи препокривање на одредена површина.

n	α	n	α	n	α
3	60^0	8	135^0	15	156^0
4	90^0	9	140^0	18	160^0
5	108^0	10	144^0	20	162^0
6	120^0	12	150^0		

Ако $n = 3$, тогаш $\frac{2}{k} = 1 - \frac{2}{3}$, т.е. $k = 6$, па потребни се 6 рамностранитриаголници во секоја точка за да се препокрие дадена површина.
Ако $n = 5$, тогаш $k = \frac{3}{5}$, што значи дека препокривањето не може да се направи само со правилни петаголници.
Ако $n = 6$, тогаш $k = 3$, што значи дека препокривањето може да се направи со правилни шестаголници, така што ќе се спојат 3 правилни шестаголници во секоја точка од површината.
Провери ги самостојно другите вредности на n од табелата, како на цртеж 2.



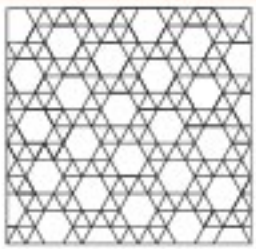
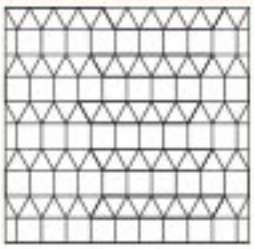
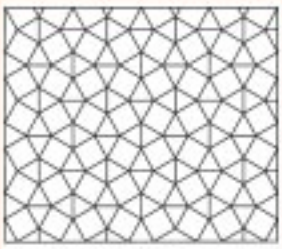
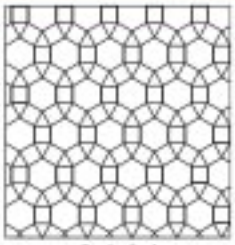
Цртеж 2

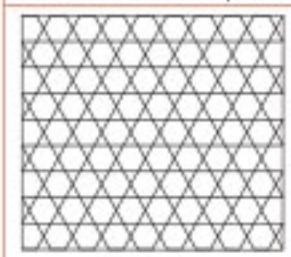
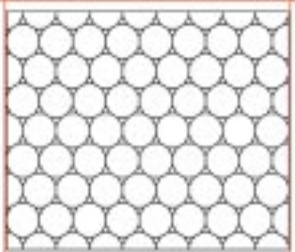
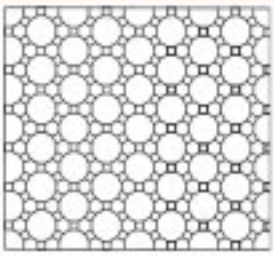
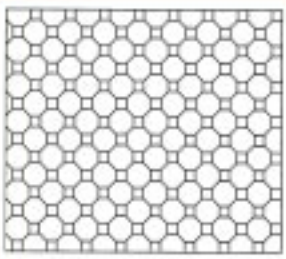
АКТИВНОСТ

Обиди се да направиш препокривање со комбинирање на два или повеќе правилни многуаголници.

Искористи некој геометриски софтвер.

Постојат 8 полуправилни препокривања познати и како **Архимедови препокривања**. Кај овие препокривања се користат два или повеќе правилни многуаголници во секоја точка од површината:

3.3.3.3.6	**3.3.3.4.4**	**3.3.4.3.4**	**3.4.6.4**
се однесува на препокривање образувано од 4 рамностранитриаголници и еден правилен шестаголник	се однесува на препокривање образувано од 3 рамностранитриаголници и 2 квадрати	се однесува на препокривање образувано од 3 рамностранитриаголници и 2 квадрати	се однесува на препокривање образувано од еден рамностран триаголник, 2 квадрати и еден правилен шестаголник
 3.3.3.3.6	 3.3.3.4.4	 3.3.4.3.4	 3.4.6.4

3.6.3.6	**3.12.12**	**4.6.12**	**4.8.8**
се однесува на препокривање образувано од 2 рамностранитриаголници и 2 правилни шестаголници	се однесува на препокривање образувано од еден рамностран триаголник и 2 правилни дванаесетаголници	се однесува на препокривање образувано од еден квадрат, еден правилен шестаголник и еден правилен дванаесетаголник	се однесува на препокривање образувано од еден квадрат и два правилни осумаголници
 3.6.3.6	 3.12.12	 4.6.12	 4.8.8

ПРИМЕР 3

Препокривање не може да се постигне со комбинација на рамностранитриаголници и квадрати, бидејќи равенката $k \cdot 60° + n \cdot 90° = 360°$ т.е. $2k + 3n = 12$ нема решение во множеството природни броеви за $n, k > 2$.

ЗАДАЧА 1

Изведи правило според кое ќе одредиш кои правилни многуаголници може да се користат за полуправилни препокривања.

АКТИВНОСТ

Истражувај во твојата околина и обиди се да најдеш примери на препокривања, како на слика 2.

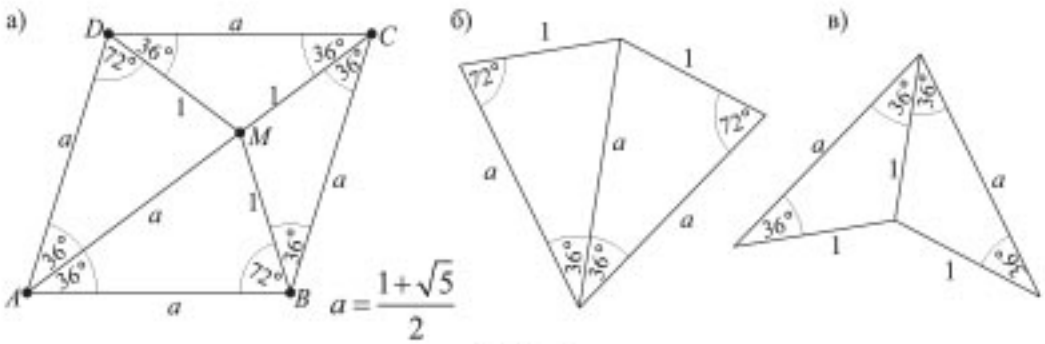


Слика 2

Препокривањето е **неправилно**, ако нема никакво ограничување за видот на многуаголници. Едно познато неправилно препокривање е препокривањето на Пенроуз (цртеж 3). Тоа е образувано кога ромбот $ABCD$ со должина на страната $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и остар агол $\alpha = 72°$ е поделен на два дела со точка M која лежи на дијагоналата AC и $\overline{MC} = 1$ (цртеж 4 а)). Притоа првиот дел е делтоид наречен „змеј“ (цртеж 4 б)) со три внатрешни агли од 72°, а вториот дел е наречен „стрела“ (цртеж 4 в)).



Цртеж 3

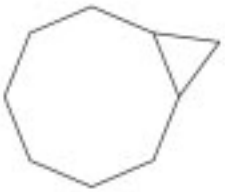


Цртеж 4

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Дали постојат петаголници со кои може да се направи препокривање?
2. Направи препокривање со помош на рамнокрак трапез со остар агол од 75°.

3. Дали можеш да најдеш кои правилни многуаголници можат да се додадат на цртежот 5 за да се добие препокривање?



Цртеж 5

4. Скицирај го неправилното препокривање кое се состои од рамностран триаголници со страна a и правилни шестаголници со страна a, такво што во секое заедничко теме се среќаваат два триаголници и два шестаголници.

5. Скицирај го неправилното препокривање кое се состои од рамностран триаголници со страна a и квадрати со страна a, такво што во секое заедничко теме се среќаваат три триаголници и два квадрати.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Истражи ги препокривањата на Ешер (слика 3) и направи свое препокривање.



Слика 3

4.16. Слични триаголници

АКТИВНОСТ

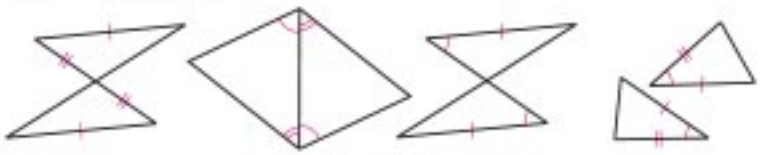
Според податоците на секој од цртежите на цртеж 1, запиши кои триаголници се складни и според кои признаци.



Цртеж 1

АКТИВНОСТ

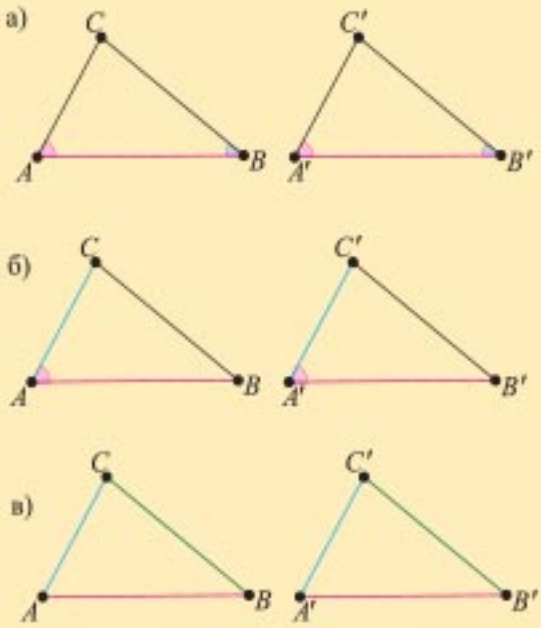
Одреди дали триаголниците на секој од цртежите на цртеж 2 се складни. Ако одговориш потврдно, тогаш наведи според кој признак.



Цртеж 2

Признаци за складност на два триаголници:

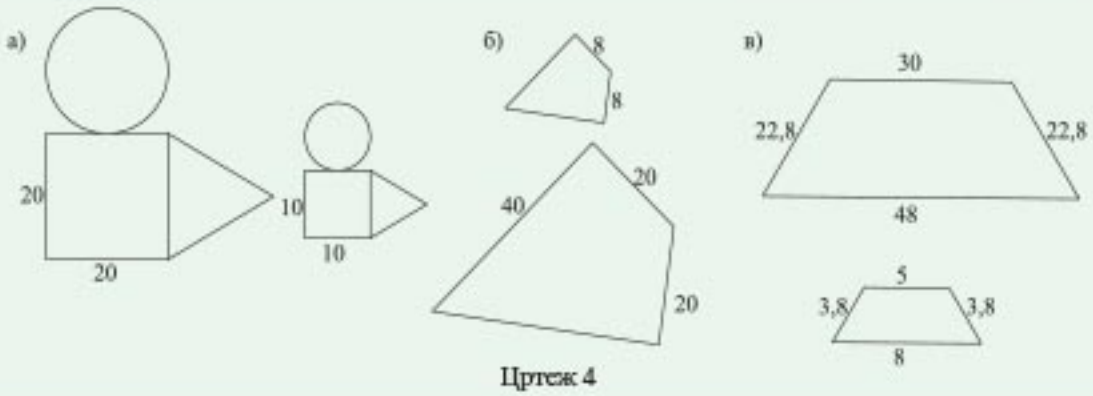
- (АСА) значи дека кај едниот триаголник една страна и двата агли кои лежат на неа се еднакви со соодветната страна и агли кои лежат на неа од другиот триаголник (цртеж 3 а))
- (САС) значи дека две страни и аголот меѓу нив кај едниот триаголник се еднакви на соодветните страни и агол кај другиот триаголник (цртеж 3 б)).
- (ССС) значи дека трите страни од едниот триаголник се еднакви со соодветните страни на другиот триаголник (цртеж 3 в)).



Цртеж 3

ПРИМЕР 1

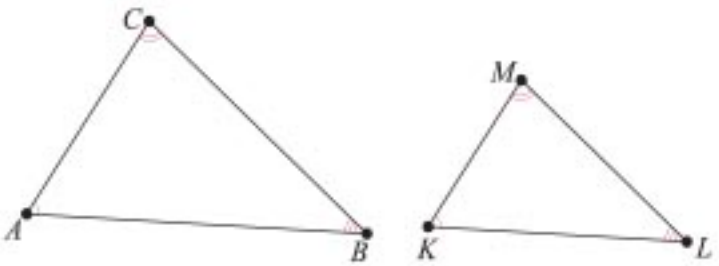
Фигурите на цртежот 4 а), б) и в) се слични. Тие се разликуваат само во големината. Обиди се да процениш како се променила големината на едната фигура во однос на другата.



Цртеж 4

Два триаголници кои имаат еднакви соодветни агли и пропорционални соодветни страни се нарекуваат **слични триаголници.**

На цртежот 5, слични се триаголниците ABC и KLM. Пишуваме $\Delta\, ABC \sim \Delta\, KLM$. Ова значи дека соодветните агли се еднакви и соодветните страни се пропорционални, т.е. $\frac{\overline{AB}}{\overline{KL}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{KM}} = k$. Бројот k се нарекува **коефициент на сличност**.



Цртеж 5

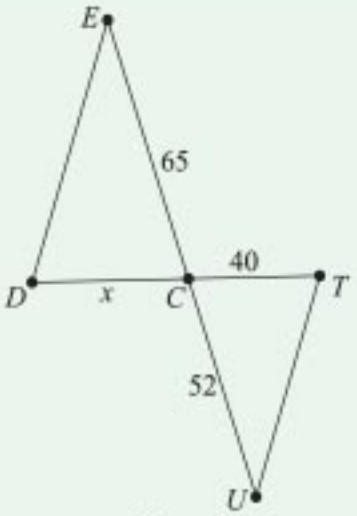
ПРИМЕР 2

Триаголниците на цртежот 6 се слични. Одреди ја должината на непознатата страна.

Од тоа што $\Delta CUT \sim \Delta CED$ следува дека

$\frac{\overline{CT}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CU}}{\overline{CE}} = k$, т.е.

$\frac{40}{x} = \frac{52}{65} \Rightarrow x = 50.$



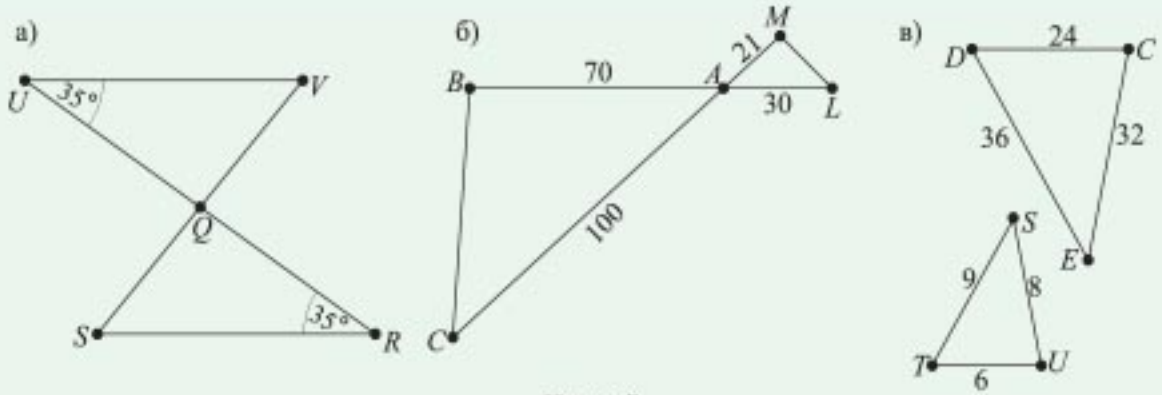
Цртеж 6

Признаци за сличност

- **(AA)** Ако два агли на еден триаголник се еднакви со два агли на друг триаголник, тогаш триаголниците се слични.
- **(CAC)** Ако еден агол на еден триаголник е еднаков на еден агол од друг триаголник, а страните кои ги образуваат тие агли кај двата триаголници се пропорционални, тогаш триаголниците се слични.
- **(CCC)** Ако страните на два триаголници се пропорционални, тогаш триаголниците се слични.

ПРИМЕР 3

Образложи зошто триаголниците на цртеж 7, а), б) и в) се слични!



Цртеж 7

а) Бидејќи $\measuredangle QRS = \measuredangle QUV = 35°$ и $\measuredangle SQR = \measuredangle VQU$ како накрсни агли, па според признакот (АА) следува дека $\Delta VQU \sim \Delta SQR$.

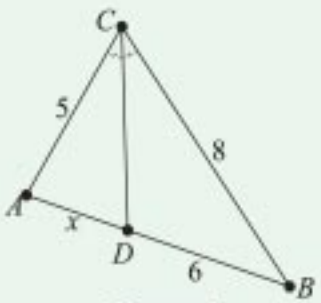
б) Бидејќи $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{21}{70} = \frac{30}{100} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AC}}$ и $\measuredangle BAC = \measuredangle LAM$ како накрсни агли, па според признакот (САС) следува дека $\Delta BAC \sim \Delta MAL$.

в) Бидејќи $\frac{6}{24} = \frac{8}{32} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ т.е. $\frac{\overline{TU}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{US}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{DE}} = \frac{1}{4}$, според признакот (ССС) следува дека $\Delta TUS \sim \Delta DCE$.

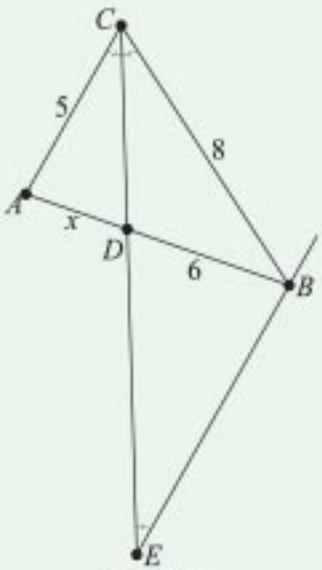
ПРИМЕР 4

Одреди ја должината на непознатата страна AD, според податоците од цртежот 8, каде CD е симетрала на аголот во C.

Прво ќе повлечеме права низ B паралелна со AC (цртеж 9) и нека пресекот на таа права со CD е E. Од тоа што $AC \parallel BE$ следува дека $\measuredangle BEC = \measuredangle DCA$, како наизменични агли и уште $\measuredangle BEC = \measuredangle DCB$, бидејќи CD е симетрала на $\measuredangle ACB$. Ова значи дека ΔCEB е рамнокрак, т.е. $\overline{BE} = \overline{BC} = 8$. Притоа, $\measuredangle ADC = \measuredangle BDE$ како накрсни агли. Триаголниците ADC и BDE се слични според (АА), па $\frac{5}{8} = \frac{x}{6}$ т.е. $x = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$.

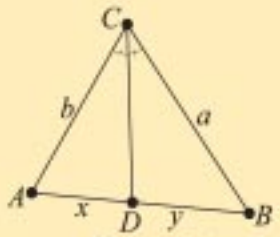


Цртеж 8



Цртеж 9

Симетралата на секој внатрешен агол ја дели третата страна на триаголникот на две отсечки во ист сооднос како и страните што го образуваат тој агол, т.е. $\frac{b}{a} = \frac{x}{y}$ (цртеж 10).



Цртеж 10

ЗАДАЧА 1

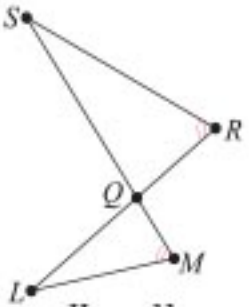
Запиши признак за сличност на два правоаголни триаголници.

ЗАДАЧА 2

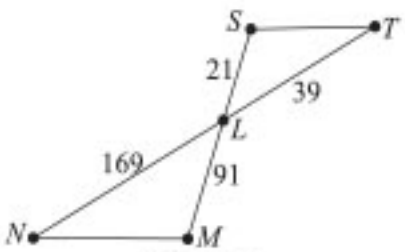
Запиши признак за сличност на два рамнокраки триаголници.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

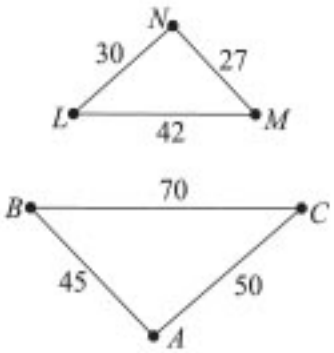
1. Препиши ја во тетратка и дополни ја реченицата, според податоците од цртежите 11, 12 и 13!

а)


Цртеж 11

б)


Цртеж 12

в)


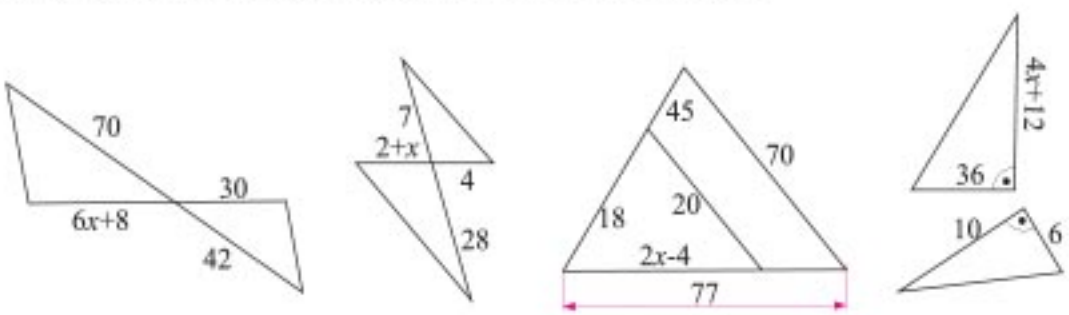
Цртеж 13

$\Delta QRS \sim \Delta$____, според признакот ____.

$\Delta LMN \sim \Delta$____, според признакот ____.

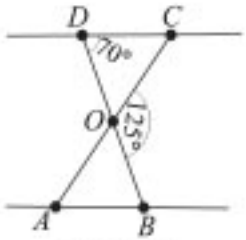
$\Delta ABC \sim \Delta$____, според признакот ____.

2. Одреди ја должината на непознатата величина, според податоците од цртежите на цртеж 14, ако е познато дека триаголниците на цртежот се слични.



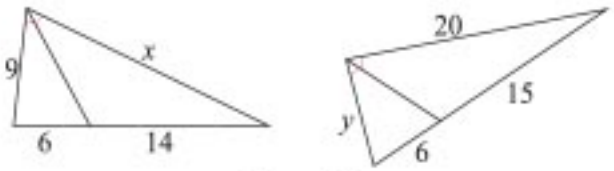
Цртеж 14

3. Според цртежот 15, одреди ги $\measuredangle COD$, $\measuredangle OCD$ и $\measuredangle BAO$, ако правите AB и CD се паралелни.



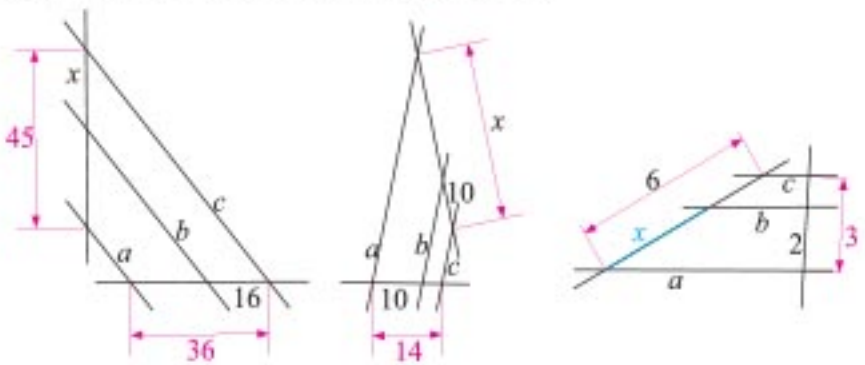
Цртеж 15

4. Одреди ги должините на страните x и y, според податоците од цртежот 16.



Цртеж 16

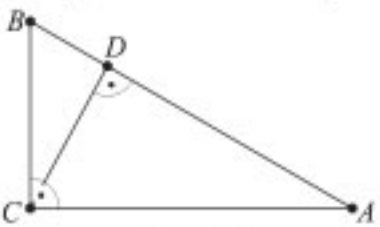
5. Одреди ја должината на непознатата страна x, според податоците од секој од цртежите на цртеж 17 а), б) и в), ако правите a, b, c се паралелни.



а) б) в)

Цртеж 17

6. Наведи кои од триаголниците на цртежот 18 се слични, ако ΔABC е правоаголен со прав агол во темето C и CD е висина спуштена на хипотенузата AB.



Цртеж 18

7. Дадени се два рамнокраки триаголници ABC и EFG со страни $\overline{AC} = \overline{BC} = 8$ и $\overline{EG} = \overline{FG} = 3$, $\measuredangle BAC = \measuredangle FEG = 40°$. Дали $\Delta ABC \sim \Delta EFG$? Образложи го одговорот!

4.17. Примена на сличноста

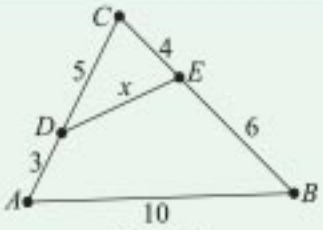
ПРИМЕР 1

Одреди ја должината на страната x според податоците од цртежот 1.

Забележуваме дека x е страна на ΔCDE, па треба да провериме дали страните на тој триаголник и ΔCBA имаат ист коефициент на сличност.

Бидејќи $\frac{4}{5+3} = \frac{5}{4+6} = \frac{1}{2}$ и аголот во темето C е заеднички, тогаш $\Delta CDE \sim \Delta CBA$ според признакот (СAС).

Значи $\frac{x}{10} = \frac{1}{2}$ од каде следува дека $x = 5$.

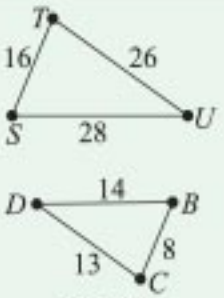


Цртеж 1

ПРИМЕР 2

Пресметај ги периметрите на триаголниците SUT и BDC од цртеж 2. Одреди го коефициентот на сличност и спореди го со коефициентот на нивните периметри.

За коефициентот на сличност имаме $\frac{\overline{SU}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{UT}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{TS}}{\overline{CB}} = 2 = k$. Додека, пак, за периметрите на триаголниците се добива $L_{\Delta SUT} = 28 + 26 + 16 = 70$ и $L_{\Delta BDC} = 14 + 13 + 8 = 35$, од каде $\frac{L_{\Delta SUT}}{L_{\Delta BDC}} = \frac{70}{35} = 2 = k$.



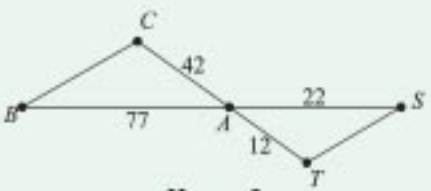
Цртеж 2

Односот на периметрите на два слични триаголници е ист со коефициентот на сличност на триаголниците.

ПРИМЕР 3

Пресметај ја плоштината на триаголниците BAC и SAT (цртеж 3), а потоа одреди го коефициентот на сличност и спореди го со односот на нивните плоштини.

За коефициентот на сличност имаме $\frac{\overline{BA}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{TS}} = \frac{7}{2} = k$. Плоштините на триаголниците се $P_{\Delta BAC} = \frac{77 \cdot 42 \sin \measuredangle BAC}{2}$ и $P_{\Delta SAT} = \frac{22 \cdot 12 \sin \measuredangle SAT}{2}$ од каде, бидејќи $\measuredangle BAC = \measuredangle SAT$ како накрсни агли и $\sin \measuredangle BAC = \sin \measuredangle SAT$, следува дека $\frac{P_{\Delta BAC}}{P_{\Delta SAT}} = \frac{77}{22} \cdot \frac{42}{12} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = k^2$.

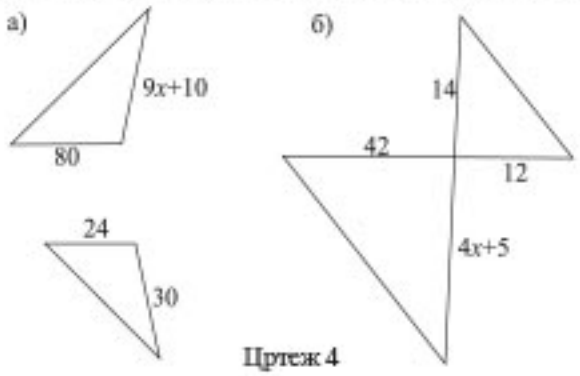


Цртеж 3

Односот на плоштините на два слични триаголници е еднаков со квадратот на коефициентот на сличност на триаголниците.

ЗАДАЧА 1

Најди го x, според податоците од цртежите 4 а) и б), ако триаголниците се слични.



Цртеж 4

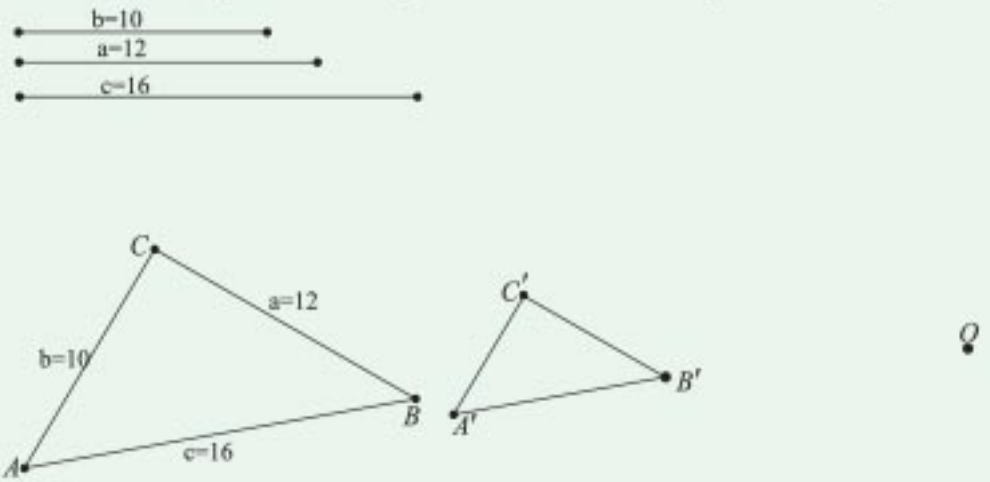
Модели за прикажување сличност меѓу објекти со помош на геометриски образовен софтвер

ПРИМЕР 4

Избери геометриски образовен софтвер. Конструирај триаголник ABC со дадени страни 10, 16 и 12 (цртеж 1). Потоа намали го на половина т.е. користи го копчето за намалување (хомотетија или дилатација).

Измери ги должините на новиот триаголник $A'B'C'$. Движи ги темињата на ABC и забележи како се менуваат темињата на $A'B'C'$.

Треба да добиеш сличен приказ како на цртеж 1. Точката O е центар на хомотетија, т.е. дилатација.



Цртеж 1

ЗАДАЧА 2

Нацртај триаголник со произволни страни и нацртај ги неговите тежишни линии, висини, симетрали на страните и симетрали на аглите. Со помош на копчето за хомотетија избери коефициент на сличност $k = \frac{1}{3}$ и нацртај нов триаголник сличен со даденият. Потоа со истиот коефициент на сличност нацртај ги неговите тежишни линии, висини, симетрали на страните и симетрали на аглите. Со алатките за мерење должина и големина на агол направи споредба на димензиите кај двата триаголници. Запиши ги добиените заклучоци.

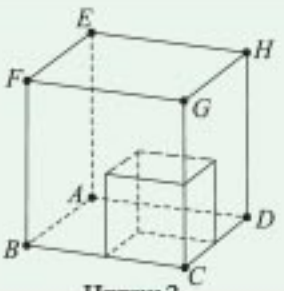
Кај сличните триаголници коефициентот на сличност останува ист за должините на соодветните страни, висини, тежишни линии, симетрали на страни и симетрали на агли.

ПРИМЕР 5

Нацртај коцка *ABCDEFGH*. Избери го копчето за хомотетија и нацртај двапати помала коцка од дадената. Како центар на хомотетијата избери го темето *C* од коцката *ABCDEFGH*.

Треба да добиеш сличен приказ како на цртеж 2.

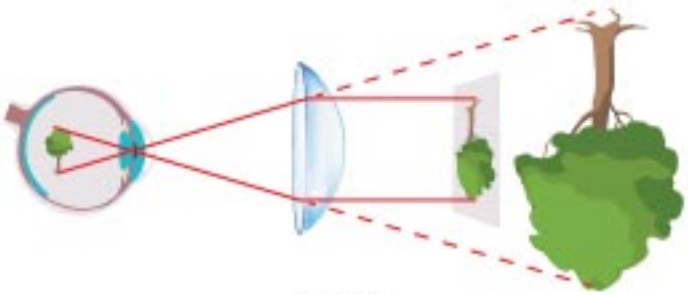
Центар на хомотетија е темето *C*.



Цртеж 2

ЗАДАЧА 3

Истражи како се користи лупа (слика 1) . Поткрепи го истражувањето со помош на геометриски софтвер во кој ќе ги претставиш оригиналниот објект и зголемениот објект.



Слика 1

ПРИМЕР 6

Дали знаеш како можеш со помош на прачка, која е долга околу еден метар, и сончев зрак да ја одредиш висината на дрво, ако немаш специјализиран инструмент за мерење?

Прво прачката ќе ја забодеш во земја и ќе ја измериш нејзината сенка (слика 2). Потоа ќе ја измериш и сенката на дрвото. Прачката, нејзината сенка и сончевиот зрак кој паѓа на врвот на прачката и го спојува со врвот на сенката образуваат правоаголен триаголник. Слично дрвото, неговата сенка и сончевиот зрак кој паѓа на врвот на дрвото и го спојува со врвот на неговата сенка образуваат правоаголен триаголник. Сончевиот зрак паѓа во исто време и под ист агол, на двата објекти од огромна далечина, па затоа може да сметаме дека сончевите зраци се паралелни, а тоа значи дека овие два триаголници се слични. Со помош на коефициентот на сличност ќе ја добиеш висината на дрвото.



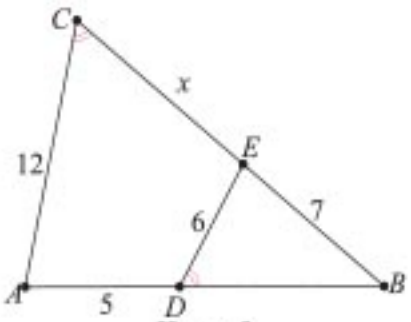
Слика 2

ЗАДАЧА 4

Во сончев ден со помош на прачка, која е долга 1,2 метри, измери ја висината на дрвото. Направи модел на прачка и дрво со произволен коефициент на сличност, користејќи геометриски образовен софтвер.

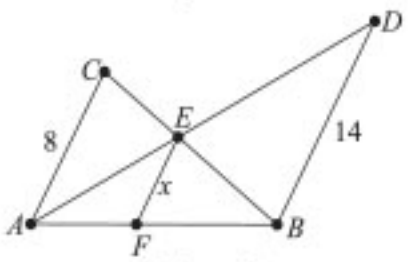
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Одреди ја должината на непознатата страна од податоците на цртежот 3.



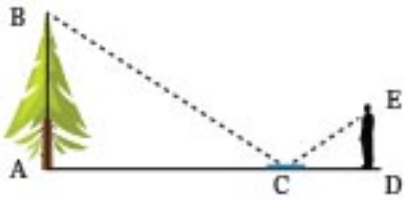
Цртеж 3

2. Одреди ја должината на непознатата страна од податоците на цртежот 4, ако правите AC, BD и EF се паралелни.

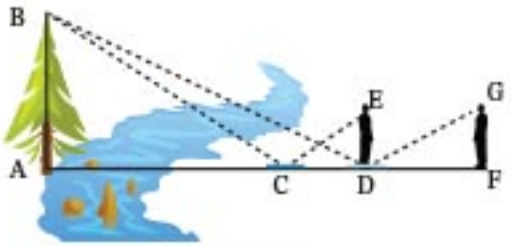


Цртеж 4

3. Висината на некој објект можеш да ја измериш со помош на огледало кое ќе го поставиш на земјата. Размисли како ќе го употребиш огледалото за да добиеш слични триаголници (слика 3). Како ќе постапиш ако меѓу тебе и дрвото има некоја препрека, на пример, река (слика 4)? Направи модел во геометриски образовен софтвер, според барањата на задачата.

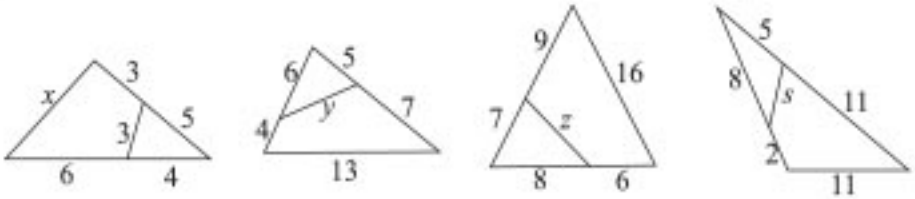


Слика 3



Слика 4

4. Одреди ја должината на непознатата страна, според податоците на секој од цртежите на цртежот 5.



Цртеж 5

5. Во дворот на една зграда има дрво со висина од 1,5 метри. Измери ја висината на зградата, ако сенката на дрвото е долга 4 метри, а на зградата 7 метри.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Истражи како се користат моделите на згради, авиони, мостови во градежништвото за да се провери нивната издржливост пред да се изградат објектите во реалноста (слика 5 и слика 6).



Слика 5



Слика 6

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

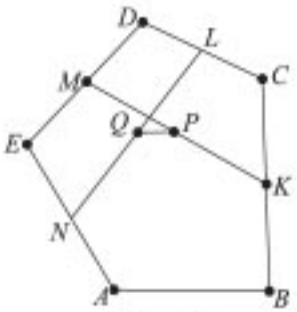
1. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Изрази ги векторите $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{BE}$, со помош на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Упрости го изразот $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MP}$.

3. Упрости го изразот $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$.

4. Одреди го векторот $\vec{x}$ од равенството $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{LM} - \overrightarrow{EL} + \vec{x} = \overrightarrow{MK}$.

5. Нека $ABCDE$ е петаголник, каде што K, L, M и N се средини на страните BC, CD DE и EA, а P и Q се средини на KM и LN, соодветно (цртеж 1). Докажи дека отсечките PQ и AB се паралелни и одреди го односот на нивните должини.



Цртеж 1

6. Докажи дека средините на основите и пресекот на дијагоналите на трапез лежат на иста права.

7. Нека E е средина на страната AB на паралелограмот $ABCD$ и нека M е пресечна точка на AC и DE. Докажи дека $AM : MC = 1 : 2$ и $DM : ME = 2 : 1$.

8. Ако A, B и C се три различни точки, тогаш дали може $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$?

9. Страните на ΔABC се: $a = 6$ cm, $b = 12$ cm и $c = 10{,}5$ cm. Пресметај ги страните на $\Delta A_1B_1C_1$, кој е сличен со ΔABC, ако $b_1 = 8$ cm.

10. Страните на еден триаголник се однесуваат како $a : b : c = 3 : 7 : 8$. Најдолгата страна на сличен триаголник на него е 10 cm. Определи ги другите две страни на вториот триаголник.

11. Пресметај ја вредноста на изразот:

    а) $\dfrac{\sin 30^\circ - \cos 30^\circ}{5 \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ}$ б) $\dfrac{\operatorname{tg} 45^\circ}{2\cos^2 30^\circ - 1}$ в) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{1 - \cos\alpha}$

12. Најди го остриот агол α за којшто важи:

    а) $\sin\alpha = \cos 65^\circ$ б) $\cos\alpha = \sin 42^\circ 50''$

    в) $\sin(\alpha + 20^\circ) = \sin 50^\circ$ г) $\operatorname{tg}(\alpha - 15^\circ) = \operatorname{ctg}(\alpha + 25^\circ)$.

13. Спореди ги вредностите:

    а) $\sin 72^\circ$ и $\sin 27^\circ$ б) $\cos 31^\circ 20'$ и $\cos 30^\circ 40'$

    в) $\operatorname{tg} 49^\circ$ и $\operatorname{tg} 29^\circ$ г) $\operatorname{ctg} 49^\circ 30'$ и $\operatorname{ctg} 49^\circ 55'$

14. Пресметај ја вредноста на останатите тригонометриски односи ако е дадено:

    а) $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ б) $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ в) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{5}$ г) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{7}{25}$

15. Пресметај ја вредноста на изразот:

    а) $4\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha$, ако $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ б) $\dfrac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, ако $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

16. Реши го правоаголниот триаголник ABC ако се дадени:

а) $\alpha = 36°2', c = 68$ б) $\beta = 64°20', a = 450$

в) $\beta = 85°10', b = 0{,}62$ г) $a = 230, c = 320$ д) $b = 3{,}9, c = 42{,}5.$

17. Нека за острите агли во правоаголниот триаголник важи $\alpha > \beta$ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Одреди ја големината на тие агли.

18. Во рамнокрак трапез, познати се основата a, кракот c и аголот α, при основата. Пресметај ги другата основа и висината на трапезот.

19. Аголот при врвот C на триаголникот ABC е $40°$. Симетралите на надворешниот и внатрешниот агол кај врвот C ја сечат правата AB во точките D и E, и образуваат рамнокрак триаголник CDE. Одреди ги аглите на триаголникот ABC.

20. Висината повлечена кон хипотенузата и симетралата на правиот агол образуваат агол од 10^0. Одреди ги острите агли во триаголникот.

21. Со помош на аглите α и β изрази го аголот φ кој симетралата на аголот α го образува со спротивната страна.

22. Ако симетралите на два внатрешни агла α и β се сечат под агол γ, кој е еднаков со третиот агол во триаголникот, тогаш одреди го тој агол γ.

23. Симетралата на еден агол во триаголникот со висината повлечена кон спротивната страна образува агол кој е еднаков на полуразликата на останатите два агла во триаголникот. Докажи!

24. Во триаголникот ABC висината CD и тежишната линија CE го делат аголот ACB на три еднакви делови. Одреди ги аглите на триаголникот ACB.

25. Правата која е нормална на основата на рамнокрак триаголник и го сече кракот и продолжението на другиот крак, преку врвот повторно образува рамнокрак триаголник. Докажи!

26. Висината која е повлечена кон кракот на рамнокрак триаголник образува со основата агол кој е еднаков на половината од аголот при врвот. Докажи!

27. Висините AA' и BB' на ΔABC образуваат со страната AB агли чиј збир е еднаков со аголот при врвот C. Докажи!

28. На хипотенузата BC на правоаголниот триаголник ABC дадени се две точки D и E, такви што $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}$. Одреди го аголот DAE.

29. Во триаголникот ABC должината на висината CH еднаква е на половина од страната AB. Внатрешниот агол BAC е еднаков на 75^0. Одреди го аголот ABC.

30. Нека CD е висина во правоаголниот триаголник ABC. Нека R и S се центри на впишаните кружници во триаголниците ACD и BCD. Ако правите CR и CS ја сечат AB во P и Q, соодветно, тогаш $\overline{AC} = \overline{AQ}$ и $\overline{BC} = \overline{BP}$. Докажи!

31. Ако важат претпоставките од задача 30, докажи дека центарот на впишаната кружница за ABC е центар и за опишаната кружница за триаголникот CPQ.

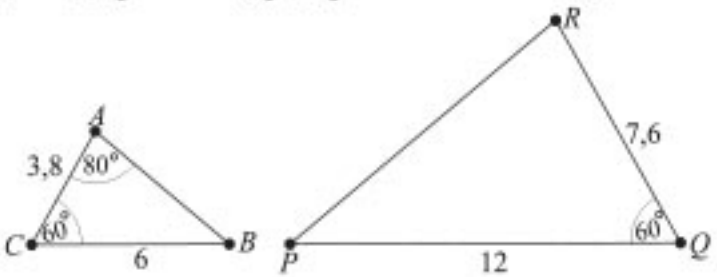
32. Нека E и F се точки кои лежат на страните PQ и PR, соодветно на ΔPQR. Според дадените податоци, одреди дали $EF \parallel QR$ ако:

а) $\overline{PE} = 3{,}9$ cm, $\overline{EQ} = 3$ cm, $\overline{PF} = 3{,}6$ cm и $\overline{FR} = 2{,}4$ cm,

б) $\overline{PE} = 4$ cm, $\overline{EQ} = 4{,}5$ cm, $\overline{PF} = 8$ cm и $\overline{FR} = 9$ cm,

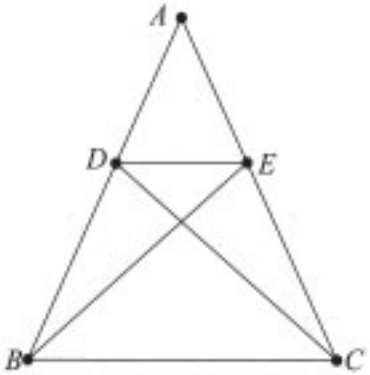
в) $\overline{PE} = 1{,}28$ cm, $\overline{EQ} = 2{,}56$ cm, $\overline{PF} = 0{,}18$ cm и $\overline{FR} = 0{,}36$ cm.

33. Според податоците од цртежот 2 одреди ја големината на $\measuredangle QPR$.

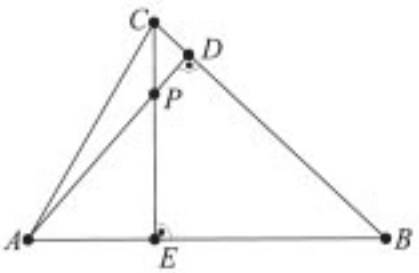


Цртеж 2

34. Ако $\Delta ABE \cong \Delta ACD$, тогаш $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (цртеж 3). Докажи!



Цртеж 3



Цртеж 4

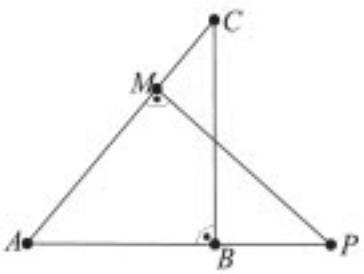
35. Висините AD и CE се сечат во точката P, (цртеж 4). Докажи дека:

а) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$ б) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$ в) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$ г) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

36. Нека точката E лежи на продолжението на страната AD на паралелограмот $ABCD$. Нека BE ја сече страната CD во точка F. Докажи дека $\Delta ABE \sim \Delta CFB$.

37. Триаголниците ABC и AMP се правоаголни со прави агли во темињата B и M, соодветно, (цртеж 5).
Докажи дека:

а) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$ б) $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{PA}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{MP}}$.



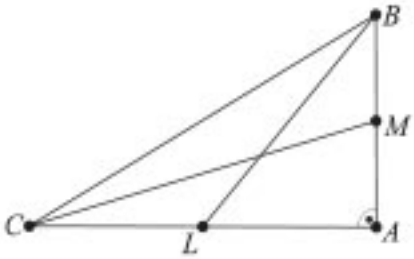
Цртеж 5

38. Вертикален столб со висина од 6 метри има сенка која е долга 4 метри. Во исто време кула има сенка долга 28 метри. Колку е висока кулата?

39. Триаголниците ABC и DEF се слични и имаат плоштини 64 и 121 квадратни центиметри, соодветно. Ако $\overline{EF} = 15{,}4$ cm, одреди ја должината на страната BC.

40. Во трапезот $ABCD$ ($AB \| CD$) дијагоналите AC и BD се сечат во точката O. Ако $\overline{AB} = 2\overline{CD}$, тогаш колку е $\frac{P_{\Delta ABO}}{P_{\Delta CDO}}$?

41. Нека CM и BL се тежишни линии во правоаголниот триаголник BCA, со прав агол во A (цртеж 6).
Докажи дека $4(\overline{BL}^2 + \overline{CM}^2) = 5\overline{BC}^2$.



Цртеж 6

Тема 5:

МЕРЕЊЕ

Во изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш:

1. да решаваш проблеми од реален контекст со примена на периметар и плоштина на 2Д- форми;
2. да решаваш реални проблеми со плоштина и волумен на 3Д форми и да користиш соодветни мерни единици.

5.1. Периметар и плоштина на 2Д-форми

ЗАДАЧА 1

Белите ленти на еден пешачки премин се правоаголници долги 3 m, широки 50 cm, а растојанието меѓу две соседни ленти е 50 cm. Колку изнесува вкупната површина која треба да се обои со бела боја, ако патот е широк 6 m, а крајните ленти се на растојание од 2,5 dm од тротоарот?



Слика 1

ЗАДАЧА 2

Пресметај го периметарот и плоштината на:

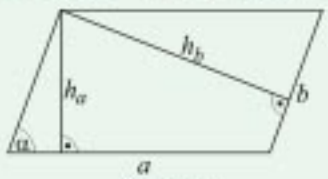
а) квадрат со дијагонала $d = 15$ cm,

б) правоаголник со страна $a = 7$ cm и дијагонала $d = 25$ cm.

ПРИМЕР 1

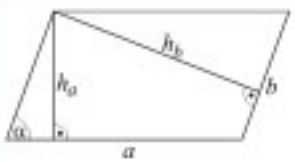
Пресметај го периметарот и плоштината на паралелограм со страни $a = 10$ cm, $b = 12$ cm и остар агол $\alpha = 30°$ (цртеж 1).

Периметарот на паралелограмот е $L = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b) = 2(10 + 12) = 2 \cdot 22 = 44$ cm, а плоштината е еднаква на $P = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin\alpha = 10 \cdot 12 \cdot \sin 30° = 10 \cdot 12 \cdot 0{,}5 = 60$ cm².



Цртеж 1

паралелограми

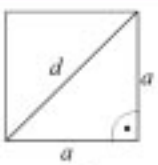


$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

$P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

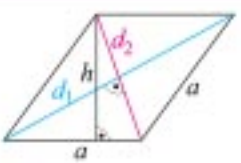


$P = a \cdot b$



$P = a^2$

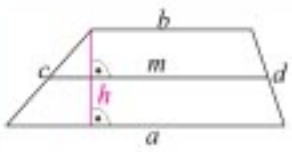
$P = \frac{d^2}{2}$

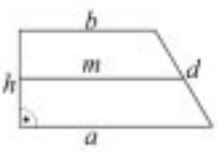


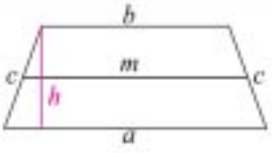
$P = a \cdot h$

$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

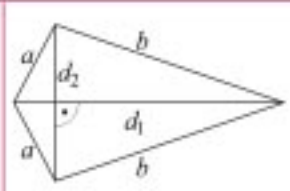
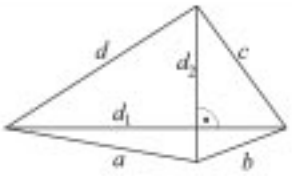
трапези







$P = \frac{(a+b)h}{2}$, $P = mh$

трапезоиди	  делтоид и четириаголник со заемно нормални дијагонали $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

ЗАДАЧА 3

Пресметај го периметарот на правоаголник чија плоштина е 756 cm², ако неговите страни се однесуваат како 3:7.

ЗАДАЧА 4

Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголникот ако една негова страна е 1dm, а другата е за 2 cm помала од дијагоналата.

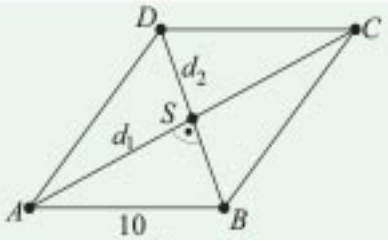
ЗАДАЧА 5

Во еден правоаголник пресекот на дијагоналите е за 4 cm поблиску до поголемата отколку до помалата страна. Пресметај ја плоштината на правоаголникот, ако неговиот периметар е 56 cm.

ПРИМЕР 2

Пресметај ја плоштината на ромб со страна 1 dm и една дијагонала 12 cm.

Нека $d_2 = 12$ cm. Од правоаголниот триаголник ABS (цртеж 2) добиваме дека $\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 10^2$ па $d_1 = 16$ cm. Плоштината е $P = \frac{d_1 d_2}{2} = 96$ cm².



Цртеж 2

ЗАДАЧА 6

Висината на ромбот е 48 cm, а поголемата дијагонала е 8 dm. Пресметај го периметарот на ромбот.

ПРИМЕР 3

Плоштината на четириаголник со заемно нормални дијагонали $d_1 = 12$ cm и $d_2 = 7$ cm е еднаква на $P = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{12 \cdot 7}{2} = 42$ cm².

ПРИМЕР 4

Даден е рамнокрак трапез со основи $a = 15$ cm, $b = 11$ cm и крак $c = 5$ cm. Одреди ги висината и плоштината на трапезот.

Од цртежот 3 имаме $15 = 2x + 11$, па $x = 2$.
Сега, од Питагоровата теорема добиваме
$h = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$, па $P = \frac{(15+11)\sqrt{21}}{2} = 13\sqrt{21}$ cm².



Цртеж 3

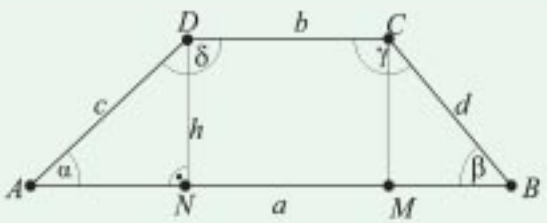
ПРИМЕР 5

Даден е трапез со основи $a = 35$cm, $b = 14$ cm и краци $c = 13$ cm, $d = 20$ cm. Одреди ја висината и плоштината на трапезот.

Од цртежот 4, имаме $\overline{AN} + \overline{MB} = 35 - 14 = 21$ cm.
Ако ставиме $\overline{AN} = x$, тогаш $\overline{MB} = 21 - x$ и од Питагоровата теорема за ΔAND и ΔMBC добиваме $h^2 = 13^2 - x^2$ и $h^2 = 20^2 - (21 - x)^2$, соодветно.
Според тоа

$$13^2 - x^2 = 20^2 - (21 - x)^2$$
$$169 - x^2 = 400 - 441 + 42x - x^2$$
$$42x = 210$$
$$x = 5$$

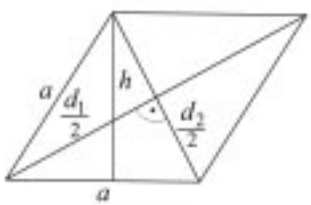
Значи $h^2 = 13^2 - 5^2$ т.е. $h = 12$ cm.
За плоштината на трапезот имаме
$P = \frac{(35+14)}{2} \cdot 12 = 294$ cm².



Цртеж 4

ПРИМЕР 6

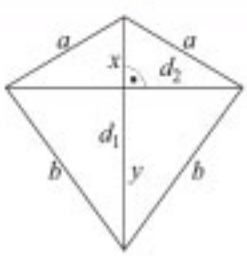
Ромб со дијагонали $d_1 = 16$ cm и $d_2 = 12$ cm
има $P = \frac{d_1 d_2}{2} = 96$ cm², $a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 10$ cm,
и $h = \frac{P}{a} = 9{,}6$ cm (цртеж 5).



Цртеж 5

ПРИМЕР 7

Делтоид со страни $a = 4$ dm, $b = 5$ dm и $d_2 = 7$ dm (d_2 не е оска на симетрија на делтоидот) има
$d_1 = x + y = \sqrt{4^2 - 3{,}5^2} + \sqrt{5^2 - 3{,}5^2} \approx 5{,}51$ dm,
каде што x и y се деловите од дијагоналата определени со рамнокраките триаголници,
$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \approx 19{,}29\,\text{dm}^2$ и $L = 2(a + b) = 18$ dm.

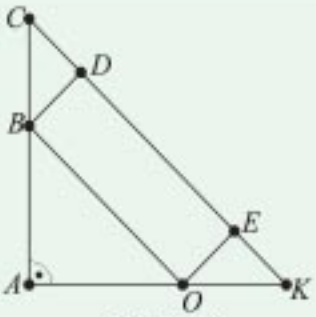


Цртеж 6

ПРИМЕР 8

Даден е рамнокрак правоаголен триаголник. Во него е впишан правоаголник кој со подолгата страна лежи на хипотенузата, а другите две темиња лежат на катетите, како на цртеж 7. Пресметај ја плоштината на правоаголникот, ако е познато дека неговите страни се во однос 5 : 2, а хипотенузата е долга 63 cm.

Аглите во C и K се 45°, што значи дека ΔOKE и ΔCBD се рамнокраки правоаголни со катета $2k$ (цртеж 7). Тогаш хипотенузата е $63 = 5k + 2 \cdot 2k$, од каде што $k = 7$. Значи, $a = 14$ cm, $b = 35$ cm, па $P = 490$ cm^2.



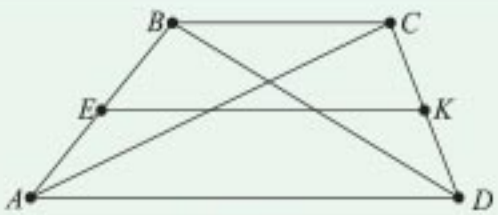
Цртеж 7

ПРИМЕР 9

Дијагоналите на еден трапез се симетрали на внатрешните агли на поголемата основа (цртеж 8). Ако трапезот има периметар 36 cm и средната линија е долга 11,7 cm, тогаш колку изнесуваат страните на трапезот?

Аглите $\measuredangle DAC = \measuredangle BCA$ и $\measuredangle ADB = \measuredangle CBD$ се еднакви како наизменични агли, па ΔACB и ΔBDC се рамнокраки од каде следува дека $\overline{AB} = \overline{BC}$ и $\overline{BC} = \overline{CD}$, па нека $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = x$, а $\overline{AD} = y$.

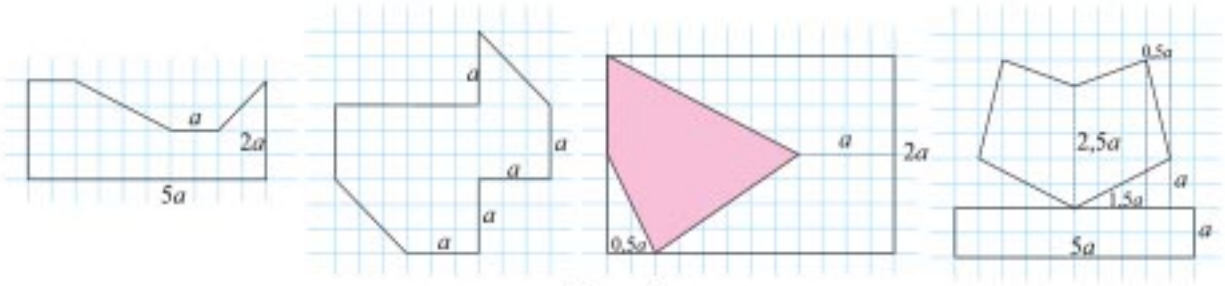
Тогаш $\begin{cases} 3x + y = 36 \\ \dfrac{x + y}{2} = 11{,}7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6{,}3\,\text{cm} \\ y = 17{,}1\,\text{cm} \end{cases}$.



Цртеж 8

ЗАДАЧА 7

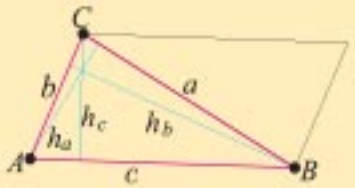
Изведи формули со кои ќе ги пресметаш плоштината и периметарот на следните фигури изразени преку страната a, на секој од цртежите од цртеж 9.



Цртеж 9

Периметар и плоштина на триаголник

Плоштината на триаголник на кој се познати една негова страна и соодветната висина (цртеж 10) се пресметува со формулата $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$.



Цртеж 10

Ако се познати должините на сите негови страни се користи $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$ (**Херонова формула**)

Плоштината на **рамностран триаголник** со страна a е $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

ПРИМЕР 1

Плоштината на триаголникот со страни $a = 5$, $b = 4$ и $c = 7$ е еднаква на

$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8 \cdot (8-5) \cdot (8-4) \cdot (8-7)} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1} = \sqrt{6 \cdot 4^2} = 4\sqrt{6}$,
каде што $s = \frac{5+4+7}{2} = 8$.

ПРИМЕР 2

Плоштината на **правоаголен триаголник** со катети 3 cm и 4 cm изнесува $P = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\,\text{cm}^2$.

ПРИМЕР 3

Плоштините на два слични триаголници се 15 и 18, и страната a на првиот е 5, тогаш соодветната страна a_1 на вториот триаголник е $a_1^2 = \frac{a^2 P_1}{P} = \frac{25 \cdot 18}{15} = 30$, па $a_1 = \sqrt{30}$.

ПРИМЕР 4

Периметарот на рамнокрак триаголник е 64 cm, а разликата на кракот и основата е 11 cm. Пресметај ја плоштината на триаголникот.

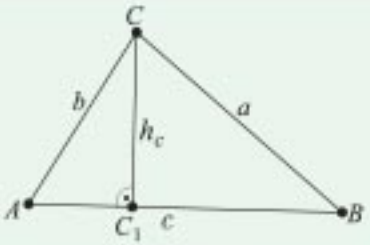
Нека a е основата, а b кракот на триаголникот. Тогаш имаме $a + 2b = 64$ и $b - a = 11$. Со собирање на овие равенства добиваме $3b = 75$, па $b = 25$ cm. Оттука следува дека $a = 14$ cm. Од Питагоровата теорема за висината добиваме $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{625 - 49} = 24$ cm, па плоштината е $P = \frac{ah}{2} = 168\,\text{cm}^2$.

ПРИМЕР 5

Пресметај ја плоштината на триаголникот ако $a = 73$ dm, $b = 52$ dm и $h_c = 48$ dm.

Од Питагоровата теорема за ΔC_1BC и ΔAC_1C добиваме $\overline{C_1B} = \sqrt{a^2 - h_c^2} = 55$ dm и $\overline{AC_1} = \sqrt{b^2 - h_c^2} = 20$ dm, (цртеж 11) па следува дека $c = 75$ dm.

Сега, плоштината е $P = \frac{75 \cdot 48}{2} = 1800 \text{ dm}^2$.

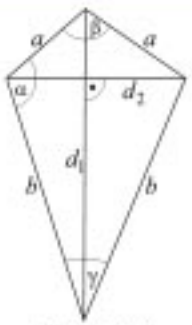


Цртеж 11

ПРИМЕР 6

Делтоид со страни $a = 4$ dm, $b = 5$ dm и $d_1 = 7$ dm (d_1 е оска на симетрија на делтоидот) има $P = 2 \cdot P_\Delta = 8\sqrt{6} \text{ dm}^2$, каде P_Δ е плоштината на триаголникот со страни a, b и d_1 пресметана со Хероновата формула,

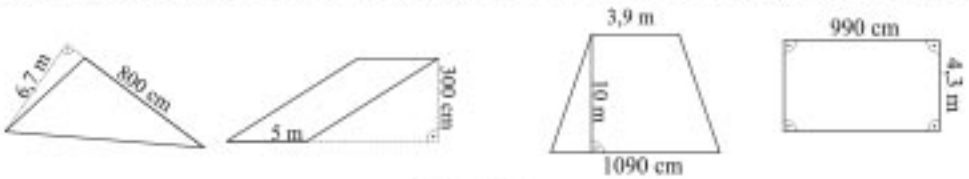
$L = 2(a + b) = 18$ dm и $d_2 = \frac{2P}{d_1} = \frac{16\sqrt{6}}{7}$ dm (цртеж 12).



Цртеж 12

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Според податоците од цртежот пресметај ја плоштината на секоја фигура на цртеж 13.



Цртеж 13

2. Одреди ги должините на висините во паралелограмот со плоштина 56 cm² и страни $a = 5{,}2$ cm и $b = 4{,}8$ cm.

3. Две страни на паралелограмот се однесуваат како 3 : 4, а неговиот периметар е 28 dm. Одреди ги должините на страните на паралелограмот.

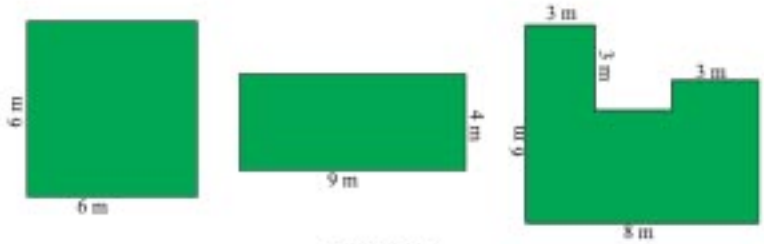
4. Познато е дека:
   а) Квадрат има плоштина $P = 36$ cm². Одреди ги должините на страната и дијагоналата на квадратот.
   б) Квадрат има периметар $L = 12$ cm. Одреди ги должините на страната и дијагоналата на квадратот.

5. а) Даден е правоаголникот со плоштина 108 dm² и страна $a = 120$ cm. Одреди ја должината на другата страна и дијагоналата на правоаголникот.
   б) Даден е правоаголник со периметар 246 cm и страна b = 80 cm. Одреди ја должината на другата страна и дијагонала.

6. Во квадрат со страна a впишан е друг квадрат чии темиња ја делат страната на првиот квадрат во однос 2 : 3. Одреди го односот на плоштините на квадратите.

7. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи 20 cm и 12 cm чии дијагонали се заемно нормални.

8. Тројца браќа имаат тревници со димензии дадени на цртеж 12. Пресметај ја плоштината на тие тревници.



Цртеж 12

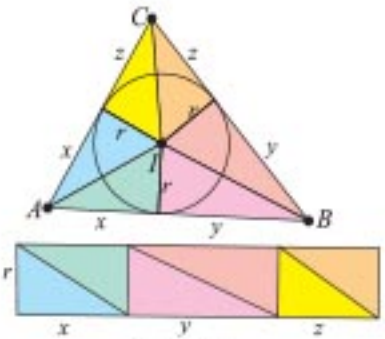
5.2. Пресметување радиус на впишана и опишана кружница

АКТИВНОСТ

Во геометриски софтвер нацртај триаголник, одреди го центарот на впишаната кружница и од тој центар повлечи ги радиусите кон страните и отсечките до темињата.

На овој начин си формирал шест правоаголни триаголници. Направи копии од тие правоаголници и од нив образувај правоаголник.

Би требало да добиеш приказ како на цртеж 1.



Цртеж 1

Плоштината на триаголник е $P = \frac{r(a+b+c)}{2} = r \cdot s$, каде што s е полупериметарот, а r е радиус на впишаната кружница во триаголникот.

Плоштината на триаголник $P = \frac{abc}{4R}$, каде што a,b,c се страни, а R е радиус на опишаната кружница околу триаголникот.

ПРИМЕР 1

За ΔABC со страни $a = 4$ cm, $b = 6$ cm и $c = 8$ cm радиусот на впишаната кружница е $r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{9 \cdot (9-4) \cdot (9-6) \cdot (9-8)}}{9} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ cm, а радиусот на опишаната кружница е $R = \frac{abc}{4P} = \frac{192}{12\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15}$ cm.

ПРИМЕР 2

Катетите на правоаголен триаголник се 8 dm и 18 cm. Одреди го радиусот на кружницата опишана околу него.

Од Питагоровата теорема имаме дека хипотенузата има должина $c = \sqrt{80^2 + 18^2} = 82\,\text{cm}$. Од Талесовата теорема следува дека $R = \frac{c}{2} = 41\,\text{cm}$.

ПРИМЕР 3

Еден сообраќаен остров, кој има облик на рамнокрак триаголник со крак 17 m и основа 16 m, треба да се уреди така што ќе се постави кружна фонтана впишана во триаголникот. Одреди го радиусот на фонтаната.

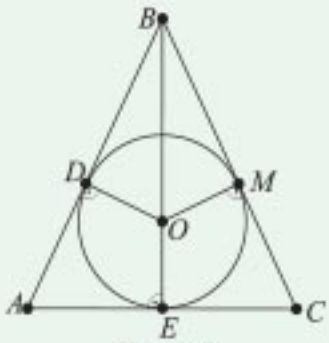
Со примена на Питагоровата теорема $\overline{BE}^2 = 17^2 - 8^2 = 15^2$, па $\overline{BE} = 15$ m (цртеж 2). Бидејќи EC и MC се тангентни отсечки следува дека $\overline{EC} = \overline{MC} = \frac{16}{2} = 8$ m, од каде што следува дека $BM = 17 - 8 = 9$ m.

Бараниот радиус

$$r = \sqrt{\overline{BO}^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{\left(\overline{BE} - r\right)^2 - 9^2} = \sqrt{(15 - r)^2 - 81},$$

од каде што со квадрирање се добива дека

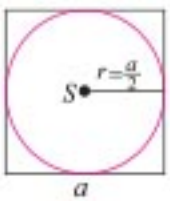
$r^2 = 225 - 30 \cdot r + r^2 - 81$, па $r = \frac{144}{30} = \frac{24}{5}$ m.



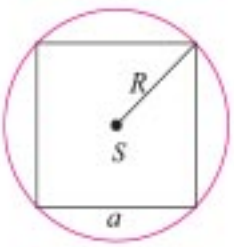
Цртеж 2

ПРИМЕР 4

Радиусот на впишаната кружница во квадрат со страна a е $r = \frac{a}{2}$ (цртеж 3), а на опишаната кружница околу квадрат со страна a е $R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (цртеж 4).



Цртеж 3



Цртеж 4

ЗАДАЧА 2

Правоаголник со страни $a = 7$ cm и $b = 5$ cm е впишан во кружница. Одреди го нејзиниот радиус.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај ја плоштината на ромб со помала дијагонала 6 cm и радиус на впишаната кружница 24 mm.
2. Во делтоид со страни 4 и 5 е впишана кружница со радиус 2. Пресметај ја плоштината на делтоидот.

3. Во ромб е впишана кружница со радиус r. Изрази ја должината на страната a на ромбот преку радиусот, ако е познато дека таа е шест пати помала од збирот на дијагоналите.

4. Пресметај ја плоштината на правоаголник впишан во кружница со радиус 12,5 cm, ако едната страна му е 7 cm.

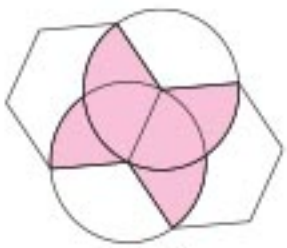
5. Даден е правоаголник $ABCD$ со страни 8 cm и 6 cm. Со дијагоналата AC поделен е на два триаголници во кои се впишани кружници. Одреди го растојанието меѓу центрите на кружниците.

6. Правоаголник е впишан во кружница со радиус 8 cm. Неговите дијагонали се сечат под остар агол од 56°. Пресметај го периметарот на правоаголникот и добиениот резултат заокружи го на една децимала.

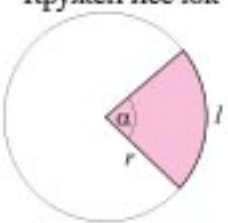
5.3. Плоштина на круг и делови од кругот

ЗАДАЧА 1

Дадени се два правилни шестаголници со страна $a = 10$ cm и една заедничка страна. Во теминьата на заедничката страна се конструирани два круга со радиус $r = 10$ cm. Пресметај ја плоштината на ликот кој е добиен како пресек, како на цртежот 1.



Цртеж 1

Кружен исечок 	Кружен исечок од круг со радиус r е делот од кругот зафатен меѓу два радиуси.	$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ}$ или $P = \frac{lr}{2}$
Кружен отсечок 	Кружен отсечок е делот од кругот ограничен со една тетива.	$P = P_1 - P_{\triangle ABO}$, каде P_1 е плоштината на кружниот исечок
Кружен прстен 	Кружен прстен е делот од рамнината ограничен со две концентрични кружници.	$P = r_1^2\pi - r_2^2\pi$

ПРИМЕР 1

Плоштината на кружен исечок од круг со радиус 6 cm, со соодветен централен агол од 45° е еднаква на $P = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}\frac{3\pi}{2}6 = \frac{9\pi}{2}$ cm².

ПРИМЕР 2

Плоштината на кружен отсечок од круг со радиус 6 cm, со соодветен централен агол 45° е еднаква на $P = \frac{9\pi}{2} - \frac{1}{2}r^2 \sin 45° = \frac{9\pi}{2} - 18\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\pi - 18\sqrt{2}}{2}$ cm².

ПРИМЕР 3

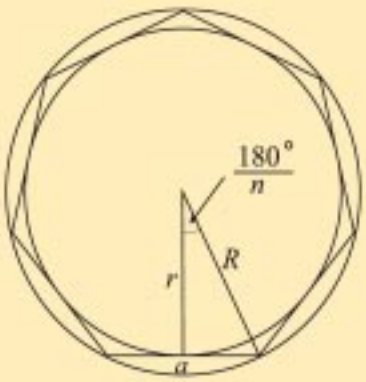
Плоштината на кружен прстен формиран од кружници со радиуси 5 и 4 е еднаква на $P = (5^2 - 4^2)\,\pi = 9\pi$.

ПРИМЕР 4

Кружница со радиус 6 е поделена на 8 еднакви делови, а кружница со радиус 8 е поделена на 6 еднакви дела. Од двете кружници земен е по еден исечок. Кој од исечоците има поголема плоштина?

Нека $P_1 = \frac{6^2\pi\frac{360°}{8}}{360°} = \frac{36\pi}{8}$ и $P_2 = \frac{8^2\pi\frac{360°}{6}}{360°} = \frac{64\pi}{6}$. Јасно $P_2 > P_1$.

Нека a е страната на правилен n-аголник, r е радиусот на впишаната, а R на опишаната кружница околу тој многуаголник. Тогаш $r = R\cos\frac{180°}{n}$ и $a = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180°}{n}$ (цртеж 2).



Цртеж 2

Периметарот на правилен n-аголник се пресметува со една од формулите (во зависност од дадените елементи) $L = na$, $L = 2nR\sin\frac{180°}{n}$, $L = 2nr\,\mathrm{tg}\,\frac{180°}{n}$.

Плоштината на правилен n-аголник се пресметува со една од формулите (во зависност од дадените елементи)

$P = \frac{1}{2}nar$, $P = \frac{1}{2}Lr$, $P = nR^2 \sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$, $P = \frac{a^2 n}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$, $P = nr^2 \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

ПРИМЕР 5

Плоштината на кружен прстен е еднаква на една четвртина од плоштината на помалиот круг. Одреди го односот на радиусите на круговите.

Од условот $(R^2 - r^2)\pi = \frac{1}{4}r^2\pi$ имаме $R^2 = \frac{5}{4}r^2$ т.е. $R : r = \sqrt{5} : 2$.

ПРИМЕР 6

Ако должината на лакот AB е πcm и соодветниот централен агол е $\alpha = 15°$, тогаш периметарот на кружницата ќе го одредиме на следниот начин:

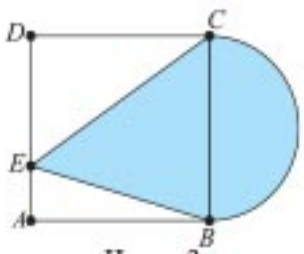
Од равенството $l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$ се добива $l = \frac{2r\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{L\alpha}{360^\circ}$, т.е. $L = \frac{l \cdot 360^\circ}{\alpha}$. Значи, бараниот периметар е $L = 24\,\pi$cm.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Од произволна точка A што лежи на кружница повлечени се две тетиви со должина 9 cm и 17 cm. Одреди го радиусот на кружницата, ако растојанието меѓу средините на тетивите е 5 cm.

2. Тетивите $\overline{AB} = 6$ cm и $\overline{AC} = 8$ cm се заемно нормални. Одреди ја плоштината на кругот.

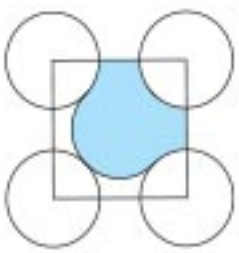
3. Пресметај ја плоштината на обоената фигура на цртеж 3, ако $ABCD$ е квадрат со дијагонала 4 cm, BC е дијаметар на полукругот и E е произволна точка од страната AD.



Цртеж 3

4. Од полукруг со радиус $R = 10$ cm, отсечени се два полукруга со радиуси $r_1 = 3$ cm и $r_2 = 7$ cm чии центри лежат на дијаметарот на полукругот и се допираат меѓу себе. Одреди ја плоштината на остатокот.

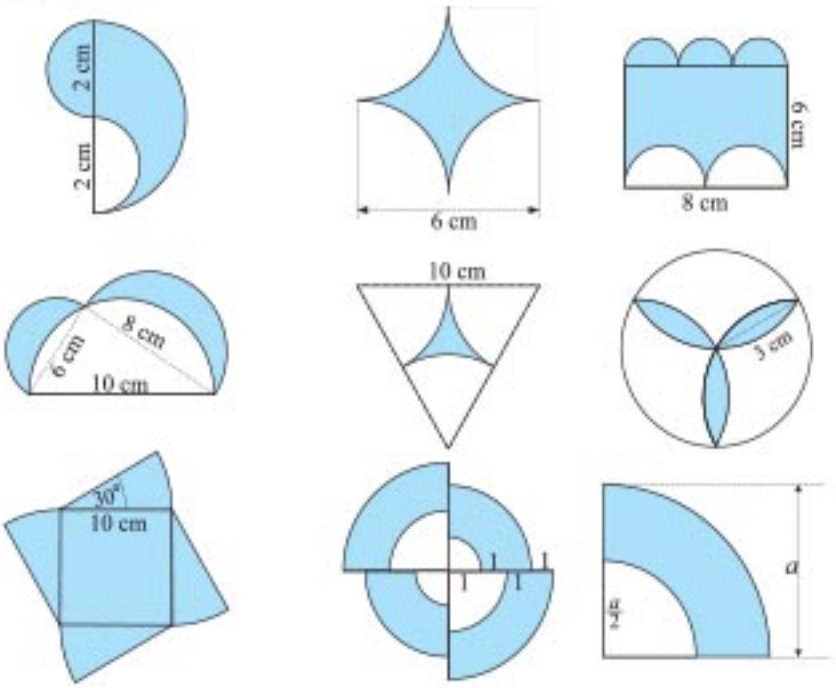
5. Пресметај ја плоштината на засенчениот дел (цртеж 4), ако сите кружници имаат радиус 1 cm. Притоа, четирите кружници имаат центри во темињата на квадратот и ја допираат петтата кружница однадвор.


Цртеж 4

6. Пресметај ги периметарот и плоштината на:
   а) правилен десетаголник со радиус на опишаната кружница $R = 7$ cm,
   б) правилен деветаголник со радиус на впишаната кружница $r = \sqrt{2}$ cm.

7. Во кружница е впишан правилен осумаголник, а околу неа е опишан правилен шестаголник. Одреди го односот од плоштините на многуаголниците.

8. Пресметај ја плоштината на сините делови, според дадените податоци на секој од цртежите на цртеж 5.



Цртеж 5

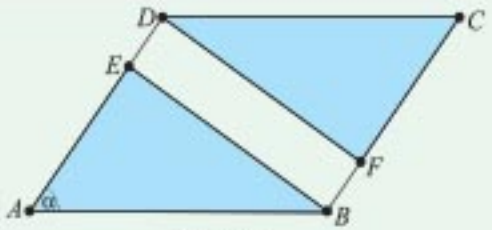
5.4. Примена на теоремите во проблемски ситуации

ПРИМЕР 1

Даден е паралелограм со страни $a = 9$ dm и $b = 7$ dm и остар агол $\alpha = 58°$. Од него е изваден правоаголник, како на цртежот 1. Пресметај ја плоштината на делот од паралелограмот, без правоаголникот?

Од правоаголниот триаголник ABE следува дека $\overline{BE} = \overline{AB} \cdot \sin 58° \approx 7{,}6$ dm, а $\overline{AE} = \overline{AB} \cdot \cos 58° \approx 4{,}8$ dm. Значи, страните на правоаголникот се $c = 7{,}6$ dm и $d = 7 - 4{,}8 = 2{,}2$ dm, па неговата плоштина $P_1 = 16{,}72$ dm^2.

Конечно, плоштината на делот од паралелограмот без правоаголникот е $P = ab \sin 58° - P_1 \approx 36{,}71$ dm^2.



Цртеж 1

ИКТ АКТИВНОСТ

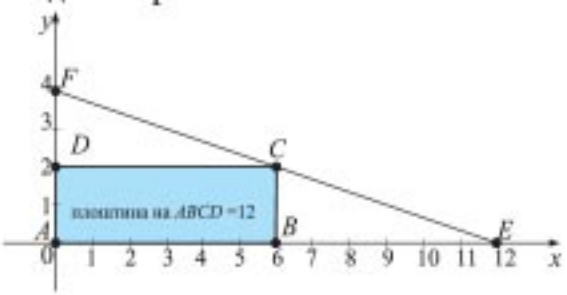
Во геометриски софтвер нацртај ја правата $x + 3y = 12$. Потоа, нацртај правоаголник $ABCD$ така што темето A лежи во координатниот почеток, а темето C лежи на правата во првиот квадрант (цртеж 2). Движи ја точката C по правата и обиди се да ги одговориш следниве прашања:

а) Колку изнесува плоштината на правоаголникот, ако хоризонталната страна е 3?

б) Колку изнесуваат страните, ако плоштината е еднаква на 10?

в) Колку изнесуваат страните на правоаголникот за да се добие најголема плоштина?

Би требало да го добиеш следниов приказ:



Цртеж 2

ПРИМЕР 2

Еден сопственик на куќа со двор сака да засади трева во дворот. Познато е дека се потребни 30 до 50 грама семе по квадратен метар. Нацртот на дворот е всушност правоаголник со страни 10 метри и 7 метри. Фонтаната е претставена како полукруг со дијаметар 5 метри и стакленикот во форма на рамнокрак трапез со основи 2 метри и 6 метри и висина 3 метри (цртеж 3). Колку килограми семе за трева се потребни за дворот?



Цртеж 3

$P = 10 \cdot 7 - 0{,}5 \cdot 2{,}5^2 \cdot \pi - (2 + 6) \cdot 3 \cdot 0{,}5 \approx 48{,}1875$ m². Значи, потребни се 1445,625 до 2409,375 грама на квадратен метар, односно 1,45 до 2,4 килограми семе за трева.

ИКТ АКТИВНОСТ

Во геометриски софтвер нацртај квадрат со страна 5 cm. Потоа, страните на квадратот подели ги во однос 3 : 2 и во него впиши нов квадрат. На ист начин во вториот квадрат впиши трет итн. Пресметај ја плоштината на четвртиот впишан квадрат. Би требало да го добиеш цртежот 4.



Цртеж 4

ПРИМЕР 3

Под со димензии 805 cm и 420 cm треба да се покрие со квадратни плочки. Плочките се поставуваат без фуга. Колкава димензија на плочката треба да се избере за да има најмалку сечење на плочки? Дали може да одредиш димензии на правоаголни плочки со чија помош ќе се покрие истиот под? Страните на плочките се природни броеви.

Го бараме најголемиот заеднички делител на 805 и 420. Тоа е бројот 35. Па потребни се 276 квадратни плочки. Од тоа што $35 = 7 \cdot 5 = 35 \cdot 1$ следува дека може да се изберат два типа правоаголни плочки.

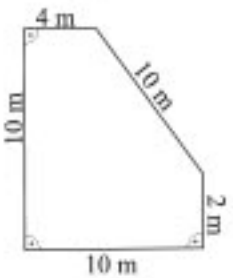
ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Основите на еден трапез се $a = 25$ cm и $b = 15$ cm, еден од краците е $c = 8$ cm. Определи го периметарот и плоштината на трапезот, ако збирот на аглите на поголемата основа е $90°$.

2. Една кутија со боја е доволна да се обои парче картон во облик на правоаголник на кој едната страна му е трипати подолга од другата страна. Ако од парчето картон направиме нов правоаголник, скратувајќи ја подолгата страна за 18 cm и продолжувајќи ја другата за 8 cm ќе истрошиме исто количество боја. Одреди го периметарот на новиот правоаголник.

3. Квадратот $ABCD$ има страна со должина 36 cm. На страната AB избрана е точка E која е на растојание 12 cm од темето B, на средината на страната BC лежи точката F и на страната CD избрана е точката G, која е на растојание 12 cm од темето C. Одреди ја плоштината на делот кој лежи во внатрешноста на триаголникот EFG и во надворешноста на триаголникот AFD.

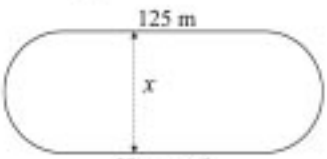
4. Подот на една работна просторија треба да се покрие со плочки чии димензии се 30 cm на 40 cm. Пресметај колку плочки се потребни, според димензиите од просторијата, дадени на цртеж 5.



Цртеж 5

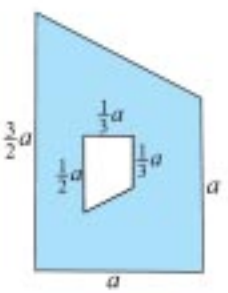
5. Во кружница е впишан правилен осумаголник, а околу неа е опишан квадрат. Одреди го односот од плоштините на многуаголниците.

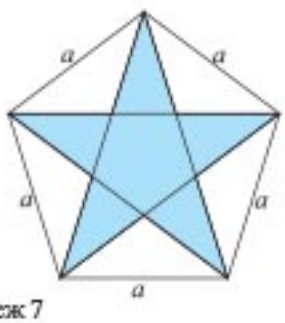
6. Патека за трчање има должина од 450 метри, два прави дела од 125 метри и два полукружни дела, како на цртежот 6. Пресметај го растојанието x меѓу правите делови од патеката. Внатрешноста на патеката ќе биде прекриена со трева. Колкава површина ќе зафати тревата?



Цртеж 6

7. Изрази ја плоштината на сините фигури преку страната a, според податоците на цртежот 7, а потоа одреди ја нивната плоштина, ако $a = 2{,}4$ m, на секој од цртежите на цртежот 7.





Цртеж 7

8. Една градина има облик на рамностран триаголник, како на цртежот 8. Делот од градината каде што се засадени рози има облик на рамностран триаголник, впишан во првиот, така што неговите темиња се средини на страните на првиот триаголник. Одреди ја плоштината на делот засаден со рози, ако првиот триаголник има страна 10 m.


Цртеж 8

5.5. Плоштина и волумен на 3Д-форми

3Д-форма мора да биде ограничена од сите страни. Границата која го одвојува делот од просторот што го зафаќа формата од преостанатиот дел надвор од неа се нарекува површина на формата. Според тоа, 3Д-форма е унија од внатрешниот дел од просторот и границата. 3Д-формата уште ја нарекуваме геометриско тело.

Призма. Плоштина и волумен на призма

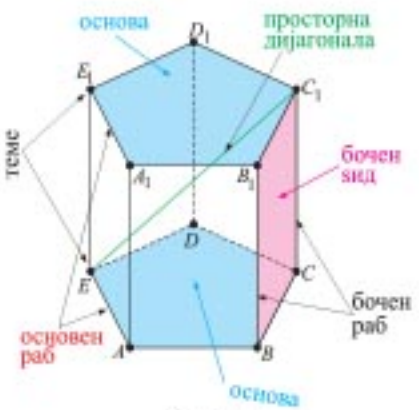
ЗАДАЧА 1

На колку различни начини може да распоредиш 8 идентични коцки со страна 1 cm и да добиеш права призма? За секој распоред одреди го бројот на квадрати кои ја сочинуваат површината на призмата.

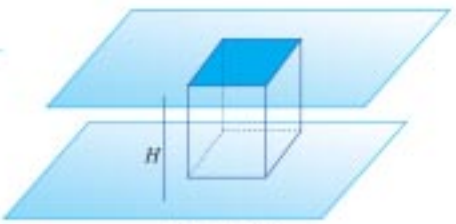
Права призма е рабеста 3Д-форма ограничена со два складни и паралелни многуаголници и онолку правоаголници колку што имаат страни многуаголниците.

Двата складни многуаголници што лежат на паралелните рамнини се викаат **основи** или базиси, а правоаголниците **бочни** ѕидови на призмата и за нив велиме дека ја образуваат нејзината **обвивка**. Страните на складните многуаголници се викаат **основни рабови**, а страните на правоаголниците, кои не лежат на некоја од основите, се викаат **бочни рабови**. Заедничките точки на рабовите на призмата се викаат **темиња** на призмата (цртеж 1).

Според многуаголникот во основата, призмата може да биде: тристрана (триаголна), четиристрана, петстрана призма итн. Растојанието помеѓу основите на призмата се вика **висина** на призмата и се означува со H (цртеж 2).



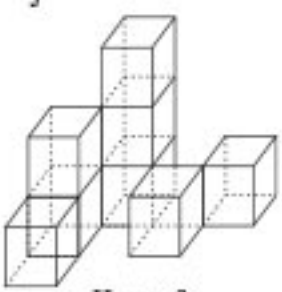
Цртеж 1



Цртеж 2

ПРИМЕР 1

Површината на 3Д-формата, на цртежот 3, е составена од 40 квадрати со страна a, па нејзината плоштина е $P = 40a^2$.

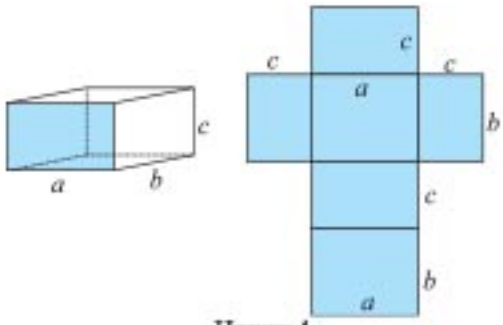

Цртеж 3

Плоштина на една призма е збир од плоштините на двете основи и плоштините на многуаголниците кои ја сочинуваат обвивката на призмата.

Ако плоштината на призмата ја означиме со P, плоштината на основата со B и плоштината на обвивката со M, тогаш $P = 2B + M$. Бидејќи ѕидовите на права призма се правоаголници со една страна која е и основен раб, а друга страна висина на призмата H, тогаш плоштината на обвивката е производ од периметарот на основата и висината, односно $M = L \cdot H$.

ЗАДАЧА 2

Подарок во облик на квадар треба да се обвитка со украсна хартија (цртеж 4). Колку хартија е потребно ако димензиите на подарокот се 4 cm, 5 cm и 11 cm?

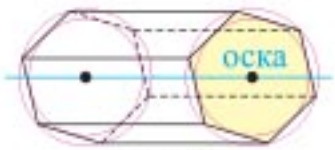


Цртеж 4

Плоштината на квадар со страни a, b и c се пресметува со формулата $P = 2B + M = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + bc + ca)$.

Права призма со основа правилен многуаголник се вика **правилна призма**.

Правата што минува низ центрите (центарот на впишана и центарот на опишана кружница) на основите кај правилна призма се вика **оска** на призмата (цртеж 5).



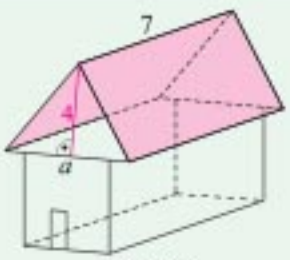
Цртеж 5

ПРИМЕР 2

Покривот на една помошна зграда има облик на правилна тристрана призма. Колку лим е потребно за да се препокрие зградата ако покривот е долг 7 метри, а висок 4 метри?

Покривот се состои само од два ѕида од призмата, што значи дека треба да се одреди основниот раб a на призмата (цртеж 6). Од формулата за висина во рамностран триаголник имаме $h = 4 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, па $a = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ m.

Затоа вкупната плоштина од бараниот лим изнесува $2 \cdot 7 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 64{,}6\ \text{m}^2$.

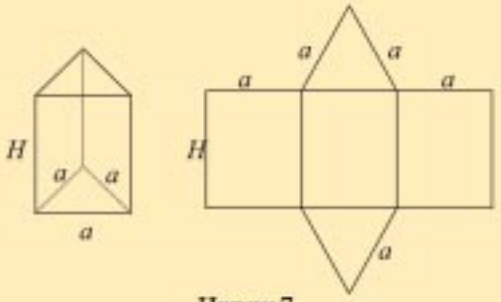


Цртеж 6

Плоштината на **правилна тристрана призма** со основен раб a и висина H се пресметува со формулата

$$P = 2B + M = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$

(цртеж 7).



Цртеж 7

ЗАДАЧА 3

Размисли и одговори на следните прашања:

а) Колку изнесува најмалиот број на ѕидови на една права призма?

б) Колку вкупно темиња и рабови има седумстрана призма?

в) Дали постои права призма кај која бројот на рабови е еднаков на 13?

ЗАДАЧА 4

Во дворот на една семејна куќа планирана е изградба на гаража во облик на квадар со ширина 3 m, должина 4 m и висока 2 m. Колку бетон е потребно за да се направи гаражата, ако дебелината на ѕидовите и покривот изнесува 40 cm, а подот е дебел 50 cm?

Волуменот на права призма се пресметува со формулата $V = B \cdot H$, каде што B е плоштина на основата, а H висина на призмата.

Волуменот на квадар со страни a, b и c се пресметува со формулата $V = abc$.

Преседи на призма со рамнина

Множеството на сите заеднички точки на една 3Д-форма и рамнината се вика **рамнински пресек** на формата.

Такви се следните преседи:

- **паралелен пресек**, којшто се добива кога рамнината е паралелна со основите на призмата, а добиениот многуаголник е складен со основите,
- **дијагонален пресек**, којшто се добива кога рамнината минува низ два несоседни бочни раба, а добиениот многуаголник е паралелограм,

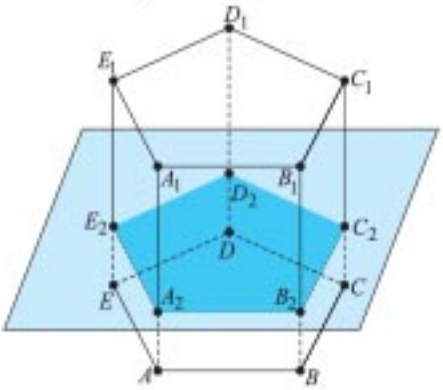
- **осен пресек**, којшто се добива кога рамнината ја содржи оската на призмата, а добиениот многуаголник е паралелограм.

ПРИМЕР 3

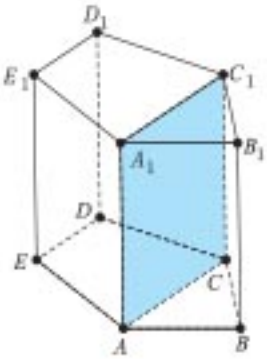
а) На цртеж 8 прикажан е паралелен пресек кај петстрана призма.

б) Дијагонален пресек кај петстрана призма е прикажан на цртежот 9.

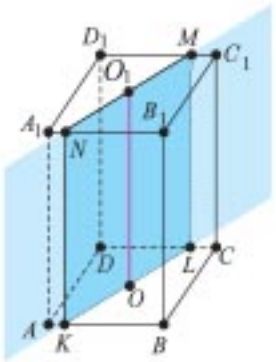
в) На цртежот 10 е прикажан осен пресек кај правилна четиристрана призма. Овој осен пресек не е дијагонален.



паралелен пресек
$A_2B_2C_2D_2E_2$
Цртеж 8



дијагонален пресек
ACC_1A_1
Цртеж 9



оска OO_1
осен пресек $KLMN$
Цртеж 10

ПРИМЕР 4

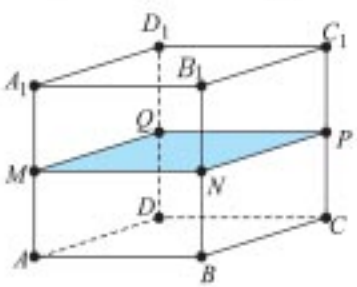
Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со страна $a = 6$ cm.

а) Паралелниот пресек $MNPQ$, кој минува низ точките M, N, P и Q, кои се средини на бочните рабови AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1, соодветно, е многуаголник складен со основата, т.е. тој е квадрат со страна $a = 6$ cm и неговата плоштина изнесува $P_1 = a^2 = 36$ cm^2 (цртеж 11).

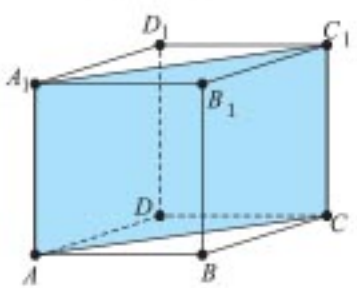
б) Дијагоналниот пресек ACC_1A_1 кај коцка е правоаголник со страни $a = 6$ cm и дијагонала на основата $d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm, па неговата плоштина е $P_2 = a \cdot d = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$ cm^2 (цртеж 12).

в) Произволниот пресек којшто минува низ дијагоналата на основата и дијагоналите на два соседни бочни ѕида е рамностран триаголник со страни еднакви на дијагоналите на бочните ѕидови и основата, односно $d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm, па неговата плоштина изнесува

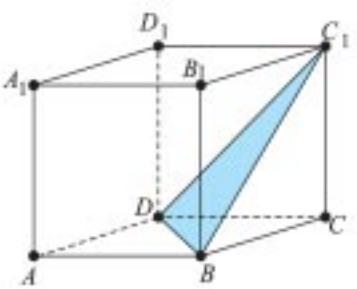
$$P_3 = \frac{d^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}\text{ cm}^2$$ (цртеж 13).



Цртеж 11



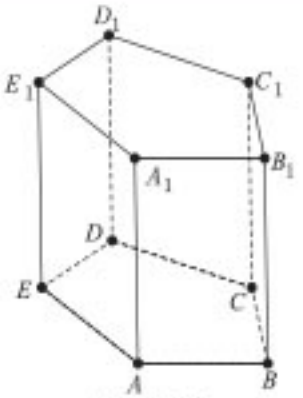
Цртеж 12



Цртеж 13

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. На цртежот 14 е дадена петстрана призма.
   а) Напиши ги сите просторни дијагонали повлечени од темињата C_1 и E.
   б) Напиши ги дијагоналите на бочните ѕидови ABB_1A_1, CC_1D_1D и AA_1E_1E.



Цртеж 14

2. Пресметај ја плоштината на четиристрана призма со основа ромб, чии дијагонали се $d_1 = 8$ cm и $d_2 = 6$ cm и висина $H = 10$ cm.

3. Пресметај ја плоштината на правилна еднакворабна шестстрана призма со должина на работ од 8 cm.

4. Пресметај ги основните рабови на квадар кај кој плоштината на основата е 48 cm², плоштината на дијагоналниот пресек е 150 cm² и висината е 15 cm. Познато е дека должините на основните рабови се природни броеви.

5. Висината на една права призма е 30 cm, а основата е ромб со страна 13 cm и дијагонали на основата кои се однесуваат како 5 : 12. Пресметај ја плоштината на дијагоналните пресеци.

6. Ако од внатрешниот дел на коцката, со страна a, се отстрани помала коцка, се добива шуплива коцка. Колку е волуменот на шупливата коцка, ако работ на внатрешната коцка е половина од работ на надворешната коцка?

7. Основните рабови на квадар се однесуваат како 4 : 3, а неговата висина е 15cm. Пресметај го волуменот на квадарот ако периметарот на основата е 21 cm.

8. Основата на права четиристрана призма е паралелограм чија една дијагонала е 17 cm, а страните се 9 cm и 10 cm и плоштината на призмата е 334 cm². Пресметај го волуменот на призмата.

5.6. Цилиндар. Плоштина и волумен на цилиндар

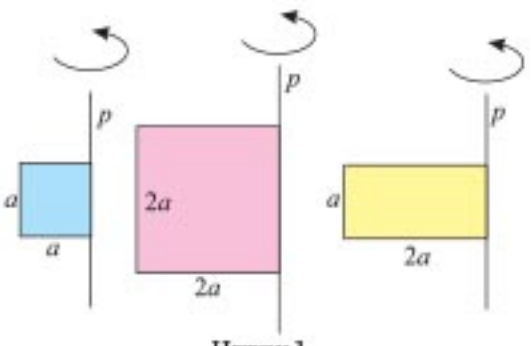
ЗАДАЧА 1

Со ротирање на секоја од фигурите околу правата p, како што е претставено на цртежот 1, се добива цилиндар. Одговори ги следниве прашања:

а) Колкава е висината на секој цилиндар?

б) Колкав е радиусот на кругот кој се добива со ротација?

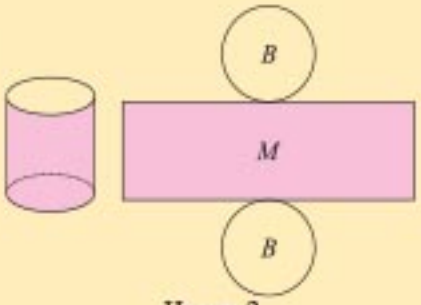
в) Колкава е плоштината на секој цилиндар?



Цртеж 1

Ако плоштината на основата ја обележиме со B, а плоштината на обвивката со M, тогаш плоштината на прав цилиндар (цртеж 2) е

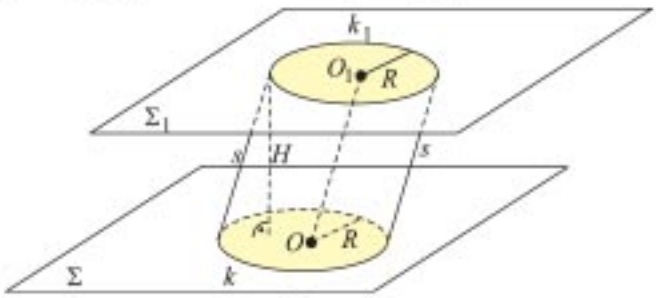
$P = 2B + M = 2R^2\pi + 2R\pi H = 2R\pi(R + H)$.



Цртеж 2

Нека $k(O, R)$ и $k_1(O_1, R)$ се два круга кои лежат во паралелните рамнини Σ и Σ_1, соодветно. Тогаш множеството од сите точки од отсечките XY, каде што $X \in k(O, R)$, $Y \in k_1(O_1, R)$ и $XY \parallel OO_1$ се нарекува **цилиндар**.

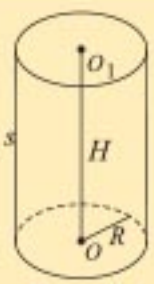
Отсечката OO_1 се нарекува **оска на цилиндарот**. Ако $OO_1 \perp \Sigma$, тогаш цилиндарот се нарекува **прав**. Круговите k и k_1 се нарекуваат **основи на цилиндарот**. Тие се складни кругови, а нивниот радиус се нарекува **радиус на цилиндарот**. Унијата од сите отсечки XY каде $XY \parallel OO_1$, X лежи на кружницата k и Y лежи на кружницата k_1 се нарекува **бочна површина на цилиндарот**. Секоја од тие отсечки XY (сите се со еднаква должина) се нарекува **генератриса**. Растојанието меѓу рамнините Σ и Σ_1 се нарекува **висина на цилиндарот** H.



Цртеж 3

Натаму, ќе работиме само со прави цилиндри. На цртежот 3 е претставен цилиндар со генератриса со должина s, висина H, радиус R и оска OO_1.

Кај прав цилиндар $s = H = \overline{OO_1}$ (цртеж 4).

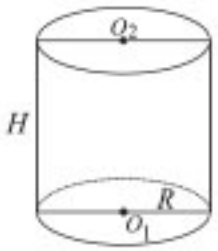


Цртеж 4

Ако дијаметарот на основата е еднаков на висината кај прав цилиндар, тогаш цилиндарот се нарекува **рамностран.**

Значи, кај рамностран цилиндар важи $d = 2R = H$.

На цртеж 5 е претставен рамностран цилиндар со висина H и радиус на основата r.



$H=2r$

Цртеж 5

ПРИМЕР 1

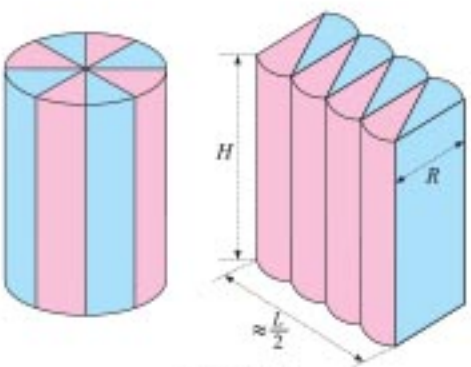
Пресметај ја плоштината на цилиндар со висина 8 cm и периметар на основата 20 π cm.

За да ја пресметаме плоштината на цилиндарот потребно е да го определиме радиусот од дадениот периметар, односно $L = 2R\pi = 20\,\pi$ од каде што $R = 10$ cm. Значи, $P = 20\pi\,(10 + 8) = 360\pi$ cm².

ЗАДАЧА 2

Радиусот на основата на рамностран цилиндар е 75 mm. Пресметај ја плоштината на цилиндарот.

Цилиндарот на цртежот 6 е разделен на еднакви делови, од коишто е составена 3Д-формата чија форма е приближна до формата на квадар. Ако цилиндарот го поделиме на што повеќе делови, тогаш добиената форма сè повеќе добива облик на квадар. Волуменот на квадарот е $V = B \cdot H$, каде B е плоштината на основата, а H е висина на цилиндарот. Основата на квадарот е правоаголник со страни R и $\frac{L}{2} = \frac{2R\pi}{2} = R\pi$.



Цртеж 6

Значи, $B = R\pi R = R^2\pi$. Волуменот на квадарот е $V = R^2\pi H$. Можеме да заклучиме дека волуменот на цилиндарот е исто така $V = R^2\pi H$.

ПРИМЕР 2

Пресметај го волуменот на рамностран цилиндар со радиус R.

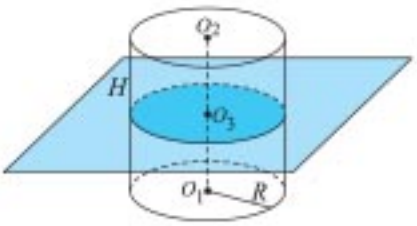
Бидејќи $H = 2R$, $V = R^2\pi \cdot 2R = 2R^3\pi$.

ЗАДАЧА 3

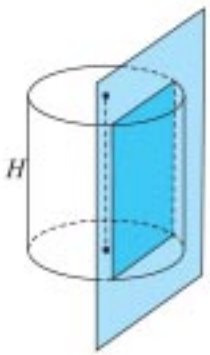
Пресметај го волуменот на цилиндар со дијаметар на основата 60 cm и висина 7,5 dm.

Преседи на цилиндар со рамнина

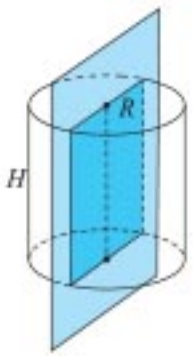
- **паралелен пресек се добива кога рамнината е** паралелна на рамнините на основите. Притоа, пресекот е круг со радиус еднаков на радиусот на цилиндарот, а рамнината е нормална на висината (цртеж 7).
- **надолжен** пресек се добива кога рамнината на пресекот е паралелна со оската на цилиндарот. Пресекот е правоаголник со една страна еднаква на висината на цилиндарот (цртеж 8).
- **осен** пресек се добива кога рамнината ја содржи оската на цилиндарот, а пресекот е правоаголник **со страни генератрисата и дијаметарот на цилиндарот** (цртеж 9). Кај рамностран цилиндар овој пресек е квадрат.



Цртеж 7



Цртеж 8



Цртеж 9

ПРИМЕР 3

Осен пресек на цилиндар е квадрат со плоштина 25 cm². Одреди ги радиусот и висината на цилиндарот.

Од тоа што осниот пресек е квадрат имаме дека $d = H$, каде d е дијаметарот на основата на цилиндарот. Значи од $d^2 = 25\ \text{cm}^2$ од каде што се добива дека $d = 5$ cm, т.е. $H = 5$ cm и $R = \frac{d}{2} = 2{,}5$ cm.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Пресметај ја плоштината на рамностран цилиндар, ако неговата бочна плоштина е 20 cm².
2. Бочната плоштина на прав кружен цилиндар е 192π cm², а дијаметарот на основата е 20 cm. Пресметај го волуменот на цилиндарот.
3. Пресметај ја плоштината на прав кружен цилиндар со волумен 112π cm³ и висина 7 cm.
4. Волуменот на прав кружен цилиндар е 375π cm³, а висината е три пати поголема од радиусот на основата. Пресметај ја плоштината на цилиндарот.

5. Правоаголник $ABCD$ со страни $\overline{AB} = 13$ cm и $\overline{BC} = 27$ cm, ротира околу оска која е паралелна со BC и е на растојание од 5 cm од неа. Пресметај ја плоштината на формата што се добива при оваа ротација.

6. Паралелен пресек на еден цилиндар има плоштина 25π cm². Колку е висок цилиндарот ако висината е три пати поголема од дијаметарот на основата?

7. Висината на еден цилиндар е 6 cm, а радиусот на основата 5 cm. Одреди ја плоштината на надолжен пресек кој е на растојание од 4 cm од оската на цилиндарот.

5.7. Примена на плоштина и волумен на 3Д-форми

ЗАДАЧА 1

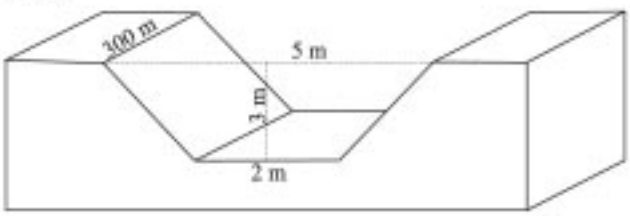
На спортски терен поради истекување на дождовница ископан е канал во должина од 300 метри и длабок 3 метри. Напречниот пресек на каналот е рамнокрак трапез со основи 2 метри и 5 метри (цртеж 1).

а) Пресметај колку литри земја се ископани од теренот за да се направи каналот.

б) Колку литри вода ќе се соберат ако висината на водата достигне 1 метар?

в) Колкава површина со трева е извадена за правење на каналот?

г) Ако на дното на каналот се постави крупен песок со дебелина од 10 cm, тогаш колку кубни метри песок е потребно?



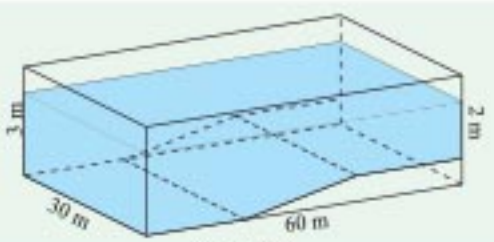
Цртеж 1

ПРИМЕР 1

Еден базен има должина 60 m и ширина 30 m (цртеж 2). Во првата третина од должината е длабок 2 m. Во средната третина косо се спушта на длабочина од 3 m. Во последната третина е длабок 3 m. Пресметај колку литри вода има во базенот ако е исполнет со вода до 30 cm од работ.

Волуменот на базенот е разлика од волуменот на четристрана призма со димензии 60 m, 30 m и 2,7 m и четиристрана призма со основа правоаголен трапез со основи 40 m и 20 m и висина 1 m, односно

$V = 60 \cdot 30 \cdot 2{,}7 - \frac{(40+20)\cdot 1}{2} \cdot 30 = 3960\,\text{m}^3 = 3960 \cdot 10^3$ литри вода.



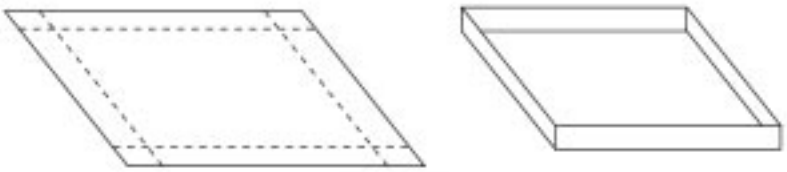
Цртеж 2

ЗАДАЧА 2

Во иднина ќе треба да се сменат плочките кои се поставени во внатрешноста на базенот. Користи ги податоците од претходниот пример, за да ја одредиш површината во квадратни метри, според која ќе се одреди бројот на потребни плочки.

АКТИВНОСТ

Земи бел лист со ширина 21cm и должина 29,7 cm и на сите четири краеви означи (и отсечи) квадрати со страна 1 cm (цртеж 3). Пресметај го волуменот на кутијата која се добива кога ќе ги споиш сите страни. Потоа означи квадрати со страна 2 cm и пресметај го новиот волумен. Обиди се да одредиш колкава треба да биде страната на квадратот за да се добие кутија која ќе има најголем волумен.



Цртеж 3

ЗАДАЧА 3

Еден кабел има жица со дијаметар 1,5 mm. Околу жицата има изолација (слика 1). На овој начин кабелот има дијаметар од 3 mm. Ако е познато дека специфичната густина на жицата изнесува 7800 kg/m³, а на изолацијата 1200 kg/m³, тогаш одреди колку маса имаат 100 m од овој кабел.



Слика 1

ЗАДАЧА 4

Пита кашкавал има облик на цилиндар со радиус 20 cm и висина 15 cm. Од неа се исечени 3 парчиња, како на слика 2. Првото парче има централен агол од 30°, второто од 25° и третото од 40°. Трите парчиња се преливаат со топено сирење со дебелина од 1,5 mm. Пресметај колку литри се потребни да се прелие секое парче.



Слика 2

АКТИВНОСТ

На плац во облик на квадрат од 625 m² изграден е еколошки дом со површина од 120 m². Градината има земјоделски култури засадени на дел од плацот во облик на правоаголник со ширина 10 m и должина 20 m. Планирано е на едната половина од покривот на домот да има систем за собирање на дождовница која ќе се користи за наводнување, како на слика 3. Половината од покривот има ширина 12 m, а должина 10 m.



Слика 3

а) Колкав резервоар за вода е потребен за полевање на целата градина ако за полевање на 1 m^2 се трошат околу 2 литри вода?

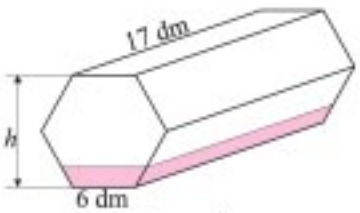
б) Ако резервоарот има облик на цилиндар кај кој односот на радиусот и висината е 1 : 3, тогаш одреди го неговиот радиус и висина.

в) Ако два дена врнело и наврнале 3 литри на метар квадратен, дали резервоарот ќе се наполни за тие два дена?

г) Колку литри дожд наврнале на целиот плац, а колку на домот, за тие два дена?

ЗАДАЧА 5

Ротирачки барабан, којшто се користи за никлување на мали делови, има форма на правилна шестаголна призма, како на цртежот 4. При работа се исполнува само една шесттина од висината h. Одреди го волуменот на наполнетиот дел од барабанот.



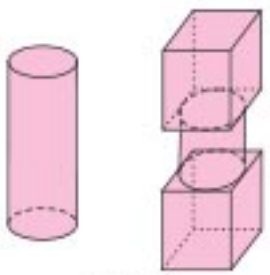
Цртеж 4

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Една парцела во облик на правоаголник со страни од 100 m и 60 m се подготвува за градба. За таа цел треба да се помине со валјак кој има должина од 2 m и радиус 64 cm. Познато е дека валјакот не смее да ја смени насоката при движење од едниот до другиот крај на парцелата. Колку време е потребно да се помине целата парцела, ако валјакот има фреквенција на ротација од 0,2 Hz? Времето потребно валјакот да се заврти назад треба да се занемари.

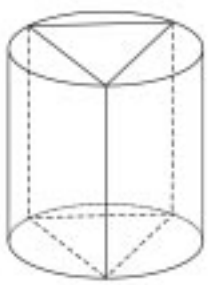
2. Бетонски прстени со радиуси 1 m и 1,5 m се користат за внатрешна заштита на бунар. Бунарот има длабочина од 12 m. Колку прстени се потребни, ако еден прстен има висина од 0,4 m? Одреди ја масата на прстените, ако специфичната густина на бетонот изнесува 2300 kg/m^3.

3. Една компанија која произведува и полни парфеми одлучила да промени еден свој производ. Парфемот претходно бил пакуван во цилиндрично шишенце, а сега ќе се полни во шишенце кое има облик на две складни коцки поврзани со рамностран цилиндар, како на цртежот. Вкупниот волумен треба да биде 100 ml. Одреди ја висината на шишенцето. Спореди ја таа висина со претходното пакување, ако е познато дека цилиндрите имаат ист радиус.

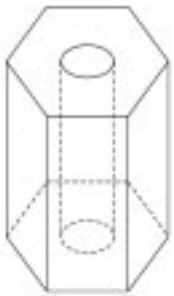

Цртеж 5

4. Стопери за врата имаат облик на тристрана призма со основа правоаголен триаголник со катети 12 cm и 5 cm. Долги се 16 cm. Колку килограми силикон е потребно за да се изработат 2,53 милиони стопери, ако специфичната густина на силиконот изнесува 1,6 g/cm^3.

5. Алуминиумски калап се состои од цилиндар во кој е впишана правилна тристрана призма (цртеж 6). Колку килограми алуминиум се потребни за да се изработи калапот, ако алуминиумот има специфична густина од 2,7 g/cm^3. Калапот има радиус 30 cm и висина 1,2 m.


Цртеж 6

6. Железна навртка има облик на правилна шестаголна призма од која е изваден цилиндар со дијаметар 0,8 cm (цртеж 7). Призмата има висина 3 cm и основен раб 1 cm. Колку килограми железо е потребно за да се излеат 1000 навртки, ако специфичната густина на железото изнесува 7,874 g/cm³.



Цртеж 7

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Во рамнокрак трапез со остар агол $\alpha = 45°$, помалата основа е 12 cm, а висината 3 cm. Пресметај ја плоштината на трапезот.
2. Одреди ја должината на страната b и односот на висините во паралелограмот со периметар 124 dm и страна 12 dm.
3. Пресметај ја плоштината на трапез со основи 20 cm и 11 cm и краци 17 cm и 10 cm.
4. Даден е триаголникот со страни a=21 cm, b=17 cm и c=10 cm. Одреди ги плоштината, висините, радиусот на впишаната и опишаната кружница и периметарот на триаголникот.
5. Даден е рамнокрак триаголник со основа $a = 10$ cm и крак $b = 13$ cm. Одреди ги плоштината, висините, радиусот на впишаната и опишаната кружница и периметарот на триаголникот.
6. Пресметај плоштина на триаголник, ако две негови страни имаат должини 27 cm и 29 cm, а тежишната линија кон третата страна има должина 26 cm.
7. Нека S е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC и нека плоштината на ΔASC е 36 cm², плоштината на ΔASB е 40 cm² и плоштината на ΔCSB е 68 cm². Пресметај ги страните на триаголникот, ако радиусот на впишаната кружница изнесува 12cm.
8. Страните на еден триаголник се 13 cm, 14 cm и 15 cm. Одреди го радиусот на кружницата со центар на средната по големина страна која ги допира другите две страни.
9. Пресметај го волуменот на правилна тристрана призма со основен раб $a = 6$ cm и висина $H = 9$ cm.
10. Пресметај го волуменот на правилна шестстрана призма со основен раб $a = 6$ cm и висина $H = 12$ cm.
11. Пресметај ја плоштината на дијагонален пресек на квадар со основни рабови 5 cm и 12 cm и висина $c = 10$ cm.
12. Шатор има облик на права призма со основа рамнокрак триаголник со основа 8 m и крак 5 m. Одреди ја бочната плоштина на шаторот без дното, ако неговата должина е еднаква со висината на основата.
13. Плоштината на еден метален сад во облик на цилиндар изнесува 1596 π cm на квадрат. Одреди ја висината на садот ако дијаметарот на основата изнесува 12cm.

14. Дадена е права призма со основа паралелограм со страни 2 cm и 8 cm и остар агол од 30°. Бочната плоштина изнесува 10 cm². Одреди го волуменот на призмата.

15. Одреден вид типли се во облик на цилиндар кој има висина еднаква со дијаметарот на основата. Бочната плоштина на типлата изнесува 104 cm квадратни. Одреди ја плоштината на основата на типлата.

16. Основата на права призма е ромб, а дијагоналните пресеци имаат плоштина 3 cm² и 4 cm². Одреди ја бочната плоштина на призмата.

17. Бочната плоштина на цилиндар изнесува 80 cm². Осниот пресек е квадрат. Одреди ја плоштината на цилиндарот.

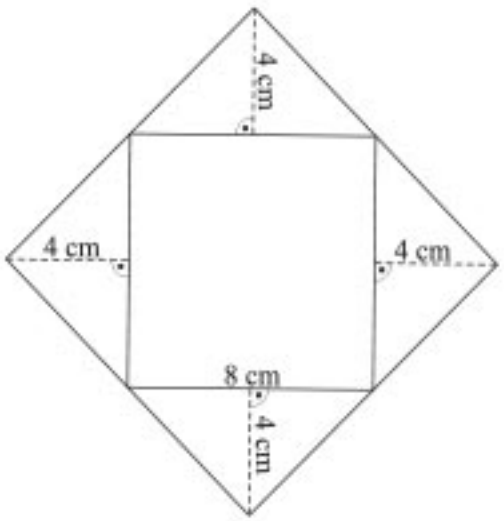
18. Канал за одвод на дождовница има облик на рамнокрак трапез со основи 6 m и 4 m и висина 1,3 m. Каналот е долг 150 m. Колкаво најголемо количество дождовница може да се собере во каналот?

19. Основата на права призма е ромб со дијагонали 3 cm и 4 cm и дијагонала на бочниот ѕид 6,5 cm. Пресметај ги плоштината и волуменот на призмата.

20. Детско игралиште има облик на квадрат, како на цртежот 1, каде што димензиите се во размер 1:100. Во средината ќе се постават плочки од вештачка трева во облик на квадрат.

а) Ако плочките имаат облик на квадрат со страна 5 cm, колку плочки треба да се купат за да се покрие делот во средината?

б) На останатиот дел ќе се посее трева. Колку килограми семе ќе треба ако на еден метар квадратен се сее по 30 грама семе?

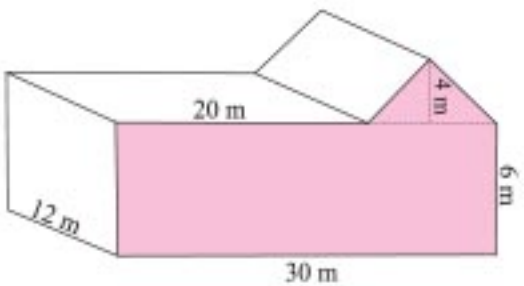


Цртеж 1

21. На цртежот 2 е претставена зграда.

а) пресметај ја плоштината на обоениот дел,

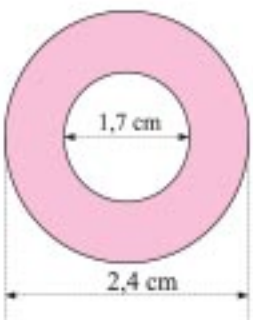
б) пресметај го волуменот на зградата.



Цртеж 2

22. Апарат за вода има цилиндрична форма со висина 50 cm и дијаметар 40 cm. Пресметај го волуменот на апаратот. Една чаша има облик на цилиндар со дијаметар 8 cm и висина 10 cm. Колку чаши вода содржи апаратот?

23. Метален предмет има форма како на цртежот 3. Одреди ја плоштината на обоениот дел. Ако предметот има дебелина од 2 mm, тогаш колкав волумен ќе имаат 100 000 вакви предмети?



Цртеж 3

24. Правилна призма има основа квадрат со страна 7 cm и висина 20 cm. Одреди ги димензиите на цилиндарот што може да се впише во призмата и притоа неговиот волумен е најголем.

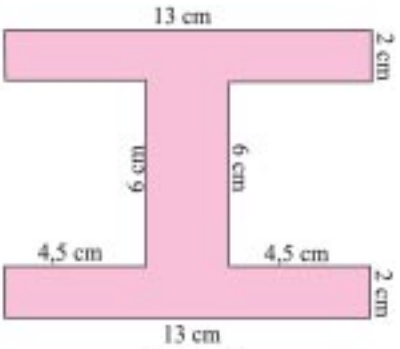
25. Челична шина со должина од 5 метри има напречен пресек како на цртежот 4.

а) пресметај ја плоштината на обоениот дел,

б) пресметај го волумен на шината,

в) одреди ја масата на шината ако специфичната густина на челикот изнесува 7,8 g/cm³,

г) колку шини може да се превезат со камионот чија носивост е 8 тони?



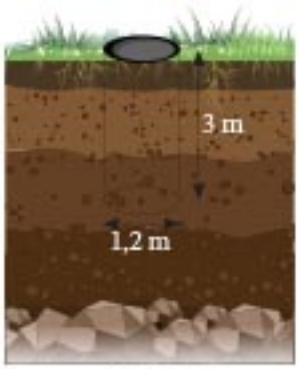
Цртеж 4

26. Асан одлучил да гради гаража долга 7 метри, широка 5 метри и висока 2,7 метри. Тој сака гаражата да ја изгради од тули кои се квадари со димензии 25cm, 12 cm и 6,5 cm. Проценил дека за градба му требаат околу 50 000 цигли. Провери ја неговата проценка.

27. На сликата 1 е претставен цилиндричен отвор за дренажа на почвата.

а) Колкав волумен зафаќа отворот?

б) Отворот треба да се обложи со цилиндрични бетонски прстени од внатрешната страна. Секој од прстените има висина 25 cm и дебелина 5 cm. Колку такви прстени се потребни за да се обложи отворот? Ако бетонот има специфична густина од 2500 kg/m³, одреди ја вкупната маса на сите прстени.



Слика 1

Тема 6:

РАБОТА СО ПОДАТОЦИ

Во изучувањето на оваа тема ќе се оспособиш:

1. да ги применуваш класичната и експерименталната веројатност во решавање проблеми од реален контекст;
2. да собираш и обработуваш податоци и да толкуваш резултати во реален контекст.

6.1. Експериментална веројатност

ЗАДАЧА 1

Разгледај ги следниве реченици и обиди се да смислиш слични на нив:

а) Денес најверојатно ќе врне!

б) Учев напорно цела година, затоа имам добри шанси за одлична оценка!

в) Невозможно е некој да има 200 години!

г) Помеѓу два понудени одговори на некое прашања, шансите се 50 : 50 да го погодиш точниот одговор иако не го знаеш.

Вакви реченици често се користат во секојдневниот говор. Секоја од нив содржи одредено предвидување врз база на нашето искуство. Шансите да се случи одредена појава можат да се одредат нумерички.

ПРИМЕР 1

Во еден клас од 24 ученици направен е следниот експеримент. Учениците се поделени во парови и секој пар треба да забележи колку пати се појавило „писмо“ при 20 фрлања монета. Притоа еден ученик од парот го изведува експериментот, а другиот бележи. Потоа добиените податоци се запишуваат во табела:

број на фрлања монета	број на појавувања „писмо“	количник од бројот на појавувања „писмо“ и вкупниот број на фрлања
20	7	$\frac{7}{20}$

Во следниот чекор учениците ги менуваат улогите и бројот на фрлања е двојно поголем. Добиените податоци од сите парови се запишуваат на табла. Потоа направена е споредба на добиените количници и заклучено е дека како што се зголемува бројот на реализации на експериментот, нивната вредност се приближува до 0,5.

АКТИВНОСТ

Организирајте слична активност, но со коцка за играње и забележете колку пати се појавиле шест точки на горната страна на коцката. Секоја група треба да ги запише своите резултати на табла. Во последната колона секоја група, почнувајќи од втората, треба да го стави количникот од бројот на појавувања шестка, поделен со вкупниот број на фрлања заедно со претходната група. Заклучоците се дискутираат на ниво на клас.

ПРИМЕР 2

Во еден клас со 24 ученици, во групи од 3 ученици, се фрла коцка и се забележува колку пати се појавила тројка. Во табелата забележани се резултатите на сите групи при фрлање коцка за

играње повеќе од 20 пати, но не повеќе од 30. Во претпоследната колона секоја група го запишува количникот од бројот на појавувања тројка и бројот на сите фрлања кој е познат како **релативна честота** или фреквенција на појавување на бројот 3. Во претпоследната колона, секоја група, почнувајќи од втората, треба да го запише количникот од вкупниот број на појавувања тројка, заедно со претходната група со вкупниот број на сите фрлања од двете групи. Овој број се нарекува **кумулативна честота** на бројот 3.

број на група	број на фрлања коцка	број на појавување тројка	релативна честота или фреквенција	кумулативна честота
1	20	7	$\frac{7}{20} = 0{,}35$	$\frac{7}{20} = 0{,}35$
2	22	3	$\frac{3}{22} \approx 0{,}14$	$\frac{7+3}{20+22} = \frac{10}{42} \approx 0{,}238$
3	21	1	$\frac{1}{21} \approx 0{,}05$	$\frac{10+1}{42+21} = \frac{11}{63} \approx 0{,}175$
4	25	6	$\frac{6}{25} = 0{,}24$	$\frac{11+6}{63+25} = \frac{17}{88} \approx 0{,}193$
5	30	3	$\frac{3}{30} = 0{,}1$	$\frac{17+3}{88+30} = \frac{20}{118} \approx 0{,}169$
6	22	4	$\frac{4}{22} = 0{,}18$	$\frac{20+4}{118+22} = \frac{24}{140} \approx 0{,}171$
7	24	4	$\frac{4}{24} = 0{,}17$	$\frac{24+4}{140+24} = \frac{28}{164} \approx 0{,}171$
8	23	3	$\frac{3}{23} = 0{,}13$	$\frac{28+3}{164+23} = \frac{31}{187} \approx 0{,}166$

Според податоците од претпоследната и последната колона може да се заклучи дека со зголемување на бројот на фрлања коцка за играње, количникот се приближува до вредноста $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$.

ЗАДАЧА 2

Обиди се да направиш табела во која ќе ги забележуваш појавувањата на секој број на точки на коцката, прво во 20 фрлања на коцката, потоа во 30 и на крај во 40 фрлања на коцката. Што забележуваш за количниците кај секој број во однос на бројот на фрлања на коцката? Табелата може да изгледа вака:

број на фрлања коцка	број на точки на коцката					
	1	2	3	4	5	6
20						
30						
40						

ЗАДАЧА 3

Забележи ги следниве настани при 20 фрлања на две монети, истовремено:

а) број на појавувања „писмо“ на двете монети,

б) број на појавување барем на една „глава“ на двете монети.

Податоците запиши ги во табела. Пресметај ги кумулативните честоти. Размисли за вредноста до која се приближуваат добиените количници.

Во сите претходни примери и задачи вршевме експерименти и набљудувавме одреден настан.

Нека n е бројот на експерименти. Количникот од бројот на експерименти, во кои се реализирал настанот кој го набљудуваме со вкупниот број на експерименти, се нарекува **експериментална** или **емпириска веројатност** на настанот.

Оваа вредност зависи од бројот на експерименти, како и од бројот на реализации на одреден настан чие појавување се бележи. За поедноставно запишување се користат ознаките $P(A)=\frac{m}{n}$, каде што A се користи за да се означи настанот, $P(A)$ е веројатноста на A, m е бројот на реализации на настанот A, а n е бројот на експерименти.

ПРИМЕР 3

Фрлање монета е направено 1000 пати. Притоа „глава“ се појавила 547 пати. Ова значи дека веројатноста на настанот A: број на појавувања „глава“ изнесува $\frac{547}{1000}=0{,}547$, а веројатноста на B: број на појавувања „писмо“ изнесува $\frac{453}{1000}=0{,}453$. Очигледно овие два настани се единствените можности при фрлање монета и $P(A)+P(B)=0{,}547+0{,}453=1$.

ЗАДАЧА 4

Две монети се фрлаат истовремено 600 пати. Набљудувани се настаните A: број на појавувања на две „писма“, B: број на појавувања на едно „писмо“ и C: број на непојавување „писмо“ и добиени се следните податоци:

број на фрлања	A	B	C
500	110	225	165

Пресметај ја експерименталната веројатност на настаните A, B и C.

ЗАДАЧА 5

Направена е споредба помеѓу временската прогноза и времето во соодветниот ден за 240 денови во една година. Утврдено е дека прогнозата е точна за 176 дена. Одреди ја експерименталната веројатност на настаните A: временската прогноза е точна и B: временската прогноза не е точна и добиените вредности запиши ги како процент.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Еден производител на автомобилски гуми има табела во која води евиденција на колку поминати километри треба да се заменат гумите. За 1000 автомобили добиени се следниве податоци

растојание во километри	до 4000	помеѓу 4000 и 8000	помеѓу 8000 и 12 000	над 12 000
број на автомобили	215	235	297	253

Одреди ја експерименталната веројатност, како процент, на купените автомобилски гуми од оваа компанија треба да се заменат, после поминати:

A: помалку од 4 000 километри,

B: поминати повеќе од 4 000 километри, но помалку од 12 000,

C: поминати повеќе од 12 000 километри.

2. Во едно полугодие се реализирани 6 писмени проверки по математика и процентот на освоени бодови на Јана се дадени во табелата:

број на писмена проверка	1	2	3	4	5	6
број на освоени бодови	73	69	67	81	68	62

Одреди ја експерименталната веројатност Јана да има над 70% освоени бодови на една случајно избрана писмена проверка.

3. Анализата на бројот на сончеви денови во еден период од годината е следниот:

месец	мај	јуни	јули	август
број на сончеви денови	19	22	24	20

Колкава е експерименталната веројатност дека случајно избран ден од овој период е сончев?

4. При инспекциски надзор на пакувања шеќер со пропишана нето-маса од 900 грама, кај 50 производи утврдено е следново:

маса во грамови	880-890	890-900	900-910	910-920
број на пакувања	19	15	13	3

Колкава е експерименталната веројатност дека случајно избрано пакување има маса поголема од 900 грама?

5. Побарај податоци и состави табела во која ќе ги внесеш концентрациите на сулфур диоксид во $\mu g/m^3$ за неколку поголеми градови од државата во месец јануари. Одреди колкава е веројатноста случајно избран град да има концентрација на сулфур диоксид која надминува 125 $\mu g/m^3$.

ИСТРАЖУВАЊЕ

Земи три монети и направи 40 фрлања истовремено. По секое фрлање бележи ги појавувањата на „писмо“:

а) на ниту една од монетите, б) само на една од монетите,

в) на точно две од монетите, г) на сите три монети.

Потоа пресметај ја релативната честота. Дали можеш да извлечеш некој заклучок?

До кои сознанија ќе дојдеш ако бројот на фрлања се зголеми за 10?

6.2. Класична веројатност

ЗАДАЧА 1

Размисли и одговори на овие прашања:

а) Ако претпоставиш дека монета е фрлена 10 000 пати, тогаш во колку од нив очекуваш да падне „глава“?

б) Ако коцка за играње е фрлена 100 000 пати, тогаш во колку од нив ќе падне двојка?

Многу експерименти, како фрлање паричка или коцка за играње можат да се повторуваат голем број пати. Други, пак, чинат многу или е невозможно да се случуваат често, како на пример тестирањето на вселенско летало во однос на некои посебни параметри потребни за подобра ефикасност. Тестирањето на издржливоста на даден објект под дејство на силни ветрови или земјотрес од одредена јачина или негово рушење за да се измери ефектот на деструкција, не е секогаш возможно. Токму затоа ако претпоставиме дека во еден експеримент секој настан е подеднакво возможен, тогаш ќе дефинираме веројатност на друг начин.

Класична или **теориска веројатност** е количник од бројот на сите поволни реализации на настанот A и бројот на сите можни реализации во експериментот, по претпоставка дека сите реализации во еден експеримент се подеднакво возможни.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Во иднина под веројатност ќе подразбираме класична веројатност.

ПРИМЕР 1

Се фрла монета само еднаш. Под претпоставка дека двете страни имаат подеднаква шанса, тогаш падна „писмо“ е настан со веројатност $\frac{1}{2}$ т.е. 50%. Слично и настанот падна „глава“ има веројатност 50%.

ЗАДАЧА 2

Се фрла коцка само еднаш. Колкава е веројатноста да се падне: а) шестка, б) четворка?

ПРИМЕР 2

Во еден сад има три топчиња: црвено, жолто и сино. Илир извлекува едно топче без гледање.

Веројатноста тоа топче да е сино е $\frac{1}{3}$, бидејќи сите топчиња имаат подеднакви шанси да бидат извлечени, а само едно е сино. Слично, веројатноста тоа топче да е црвено, односно жолто е исто така $\frac{1}{3}$. Може да речеме и дека сите три топчиња имаат шанса од приближно 33,33% да бидат извлечени од садот.

Настаните падна „писмо“, падна „глава“, падна тројка, падна шестка, итн. се викаат **елементарни настани.**

ЗАДАЧА 3

Коцка за играње се фрла еднаш. Колкава е веројатноста на настанот:

а) падна број помал од 4,

б) падна број кој не е помал од 4?

Потоа размисли, дали овие два настани се викаат елементарни? Обиди се да ги искажеш со други зборови настаните и одреди дали со нивна помош се опфатени сите реализации при фрлање коцка за играње.

Настанот кој ги содржи сите реализации кои не се од настанот A се нарекува **спротивен настан** за A. Тој настан ќе го означиме со $\overline{A}$.

Неговата веројатност е $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

ПРИМЕР 3

Коцка за играње се фрла еднаш. Колкава е веројатноста на настанот:

а) да се падне број 8,

б) да се падне број кој не е поголем од 6?

Падна број 8, има број на поволни реализации 0, затоа што коцката има шест страни и може да падне број 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Веројатноста на овој настан е 0. Тој е **невозможен настан.** Падна број кој не е поголем од 6 т.е. е помал или еднаков на 6, има број на поволни реализации 6 кој е еднаков со вкупниот број на возможни реализации. Веројатноста на овој настан е 1. Тој е **сигурен настан.**

За секој настан A, важи $0 \leq P(A) \leq 1$

ЗАДАЧА 4

Шпил карти за играње има 52 карти, кои се поделени во 4 групи (♣, ♦, ♥ и ♠) по 13 карти во секоја група. Од шпилот е извлечена една карта. Колкава е веројатноста на настанот:

а) извлечената карта да е црвена,

б) извлечена да е десетка,

в) извлечена да е црна „дама“,

г) извлечен да е „кец срце“.

д) извлечената карта да не е „слика“ т.е. да не е „џандар“, „дама“ или „поп“.

ЗАДАЧА 5

Во еден сад има 4 црвени, 6 зелени и 10 сини топчиња. Од садот е извлечено едно топче. Колкава е веројатноста извлеченото топче:

а) да не е сино,

б) да не е ниту црвено ниту зелено,

в) да е зелено или сино.

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Колкава е веројатноста двајца другари да имаат роденден (не мора во иста година):
   а) на ист датум, б) на различни датуми, ако се смета дека годината има 365 дена?

2. Во еден клас има 28 ученици, 18 девојчиња и 10 момчиња. На ливчиња се испишани редните броеви од дневникот за евиденција. Ливчињата се ставени во непрозирен сад и наставникот влече едно ливче од садот.
   а) Колкава е веројатноста дека извлеченото ливче е број на девојче од класот?
   б) Колкава е веројатноста дека извлеченото ливче е број на момче од класот?

3. Во една кутија се ставени 7 сини, 4 зелени и 6 црвени топчиња. Одреди ја веројатноста на настаните:
   а) извлечено е едно сино топче, б) извлечено е едно зелено топче,
   в) извлечено е едно црвено топче.

4. Виктор фрла две монети одеднаш. Колкава е веројатноста на настанот да се падне барем една „глава“?

5. Во сад се ставени ливчиња на кои се напишани сите природни броеви кои се содржатели на бројот 3 и не се поголеми од 37. Од садот е извлечено едно ливче. Колкава е веројатноста дека бројот на тоа ливче е парен број?

ИСТРАЖУВАЊЕ

Во сад се ставени 10 ливчиња на кои се напишани цифрите од 1 до 9 и 0. Од садот се извлекуваат 5 ливчиња, едно по друго, без враќање. Колкава е веројатноста дека на сите 5 извлечени ливчиња се наоѓаат непарни цифри?

6.3. Прибирање на податоци

ЗАДАЧА 1

Треба да провериш колку време твоите соученици поминуваат во учење, колку часови поминуваат на социјалните платформи, колку часови поминуваат во играње друштвени игри, а колку играјќи компјутерски игри. Размисли како најбрзо можеш да дојдеш до овие информации ако во твојот клас има 34 ученици. Дали на ист начин ќе ги собереш податоците од сите класови од прва година? Што ако треба да се соберат податоците од целото училиште во кое има околу 1000 ученици?



Прибирањето податоци за некое истражување се врши со помош на **инструмент за прибирање на податоци**. Такви инструменти се анкети, прашалници, чек-листи и слично.

ПРИМЕР 1

Во едно училиште сакале да ги проверат сите ученици од прва година во каква физичка кондиција се наоѓаат. Затоа одлучиле да проверат дали момчињата имаат подобри резултати во трчање на 30 метри? Дали има разлика во должината на скокот во далечина? Дали вежбите за подигање на телото подобро ги прават момчињата или девојчињата? Какво држење на телото имаат учениците?

Сите ученици кои учат во прва година се 150 и е непрактично да се тестираат сите. Токму затоа избрани се 30 ученици на случаен начин и на сите им е запишан полот, должината на скокот во далечина во метри, времето за трчање 30 метри во секунди, бројот на вежби за подигање на телото за 1 минута и држењето на телото е оценето како лошо, добро или одлично. На овој начин се собрани податоци за овие 30 ученици и сите тие се претставници на целата популација ученици од прва година.



Делот од популацијата што се состои од единки кои имаат еднакви шанси да бидат избрани се нарекува **случаен примерок**. Својството што се истражува се нарекува **статистички податок** или **статистичка променлива**.

Статистичките податоци или статистичките променливи може да бидат **описни** или квалитативни (како што е држењето на телото) и **нумерички** или квантитативни (како што е времето за трчање 30 метри изразено во секунди).

ЗАДАЧА 2

Размисли какво истражување можеш да спроведеш меѓу твоите соученици. Подготви прашалник, избери примерок и спроведи го истражувањето.

ПРИМЕР 2

Маја размислува во какви екипни спортови сакаат да учествуваат нејзините соученици: фудбал, кошарка, одбојка или ракомет. Ги запишала екипните спортови на еден лист, потоа покрај секој спорт според добиените одговори ставила цртичка и го добила следново:

фудбал 𝍸 𝍸 𝍸
кошарка 𝍸 𝍸
одбојка 𝍸
ракомет ||

На овој начин Маја подготвила прашалник и според **фреквенцијата** или **честотата** на секој одговор, открила дека фудбалот е екипен спорт во којшто нејзините соученици најмногу сакаат да учествуваат.

ЗАДАЧА 3

Размисли дали за истражување на прашањето дали учениците се чувствуваат добро во училиштето доволно е да се земе примерок од 30 ученици од прва година, ако во училиштето има 1200 ученици од прва до четврта година? Образложи го одговорот!

ПРИМЕР 3

Алмир направил анкета во класот за тоа колку секунди може неговите соученици да го задржат воздухот. Го мерел времето и ги запишал секундите на секој од соучениците:

11 17 21 35 24 14
18 22 33 42 23 19
14 24 17 12 13 18
19 22 21 24 14 17

Тој сака да знае колку од учениците можат да го задржат воздухот најдолго? Дали повеќе ученици можат да го задржат воздухот подолго од 20 секунди? Колку од нив можат да го задржат воздухот подолго од 30 секунди?

Очигледно е дека вака собраните податоци тешко се анализираат, па затоа е подобро да се групираат според некои поспецијални карактеристики. На пример, може да разгледаме ваква поделба:

број на секунди	фреквенција
10-20	13
21-30	8
31-40	2
41-50	1

Оттука лесно може да се одговори на поставените прашања.

На овој начин податоците се **групираат** според фреквенциите, т.е. претставени се со **табела на групирани фреквенции**.

ЗАДАЧА 4

Во една група од 50 туристи, 8 се постари од 70 години, 15 имаат меѓу 50 и 70, 10 меѓу 30 и 50, 14 меѓу 10 и 30 години. Обиди се да ги претставиш податоците во табела.
Внимавај интервалите со возрасти да не се преклопуваат. Дали во групата има туристи со најмногу 10 години?

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Дијана и Орхан направиле прашалник за крвната група кај соучениците. Од класот кој има 30 ученици ги собрале следните податоци:

A	B	AB	A	O	O
AB	A	O	B	A	AB
A	A	O	A	AB	O
AB	A	A	O	A	O
B	O	AB	AB	A	A

   Направи табела на фреквенции и одреди ја релативната честота. Која крвна група во класот е најчеста? Која е најретка?

2. Висините, во cm, на учениците од еден клас се следниве: 159, 138, 142, 163, 142, 142, 146, 148, 139, 141, 142, 156, 156, 139, 143, 166, 143, 158, 141, 142, 151, 142, 162, 142, 162, 148, 162, 138, 142, 136, 159.
   Направи табела на групирани фреквенции:

Висина (cm)	фреквенција
130-140	
141-150	
151-160	
161-170	

   Потоа одреди ја релативната честота во проценти и реши ги следниве задачи:

   а) Колкав процент од учениците се повисоки од 160 cm?

   б) Колкава е веројатноста да се избере ученик чија висина е поголема од 140 cm?

   в) Избран е ученик од класот. Колкава е веројатноста тој да е повисок од 150 cm, но да не е повисок од 161 cm?

3. На тестот по математика добиени се следниве поени: 85, 14, 87, 96, 45, 32, 45, 24, 15, 4, 65, 75, 74, 52, 57, 55, 32, 14, 13, 99, 100, 12, 37, 3, 37, 44, 55, 61, 25, 14, 74, 73, 8, 23, 24, 14, 25, 24, 52, 57, 12, 18, 17, 22, 88, 65, 32, 59, 85, 14, 17, 9, 33, 37. Направи табела на групирани фреквенции:

поени	фреквенција
0-10	
11-20	
21-30	
31-40	
41-50	
51-60	
61-70	
над 70	

   Потоа одреди ја релативната честота и одговори ги следниве прашања:

   а) Колку ученици имаат помалку од 41 поен?

   б) Дали бројот на ученици кои имаат помалку од 51 поен, но повеќе од 30 поени е поголем од бројот на оние ученици кои имаат повеќе од 60, но помалку од 71 поен?

в) Колку ученици се ослободени од пишување две домашни работи, ако условот е освоени поени повеќе од 70?

г) Колку ученици ќе добијат насоки за дополнителни задачи ако условот е освоени поени помалку од 21?

4. Забележи ја бојата на автомобилите што поминуваат на едно место од твојата улица, во текот на еден час. За собраните податоци направи табела на фреквенции. Потоа одговори на следниве прашања:

а) Колкава е релативната честота на автомобилите со црвена боја?

б) Колку се чести црните автомобили?

в) Колку автомобили со зелена боја поминаа во тој временски интервал?

5. За секој ден од минатиот месец најди го бројот на ученици кои биле отсутни од часовите. Претстави ги собраните податоци во табела на фреквенции. Потоа одреди:

а) Колку ученици имаат повеќе од 5 отсуства од настава?

б) Колку ученици имаат помалку од 3 отсуства од настава?

в) Дали има ученици без отсуства од настава?

г) Ако за број на отсуства поголем од 10 треба да се посетува дополнителна настава, тогаш колку од учениците ќе имаат таква настава?

ИСТРАЖУВАЊЕ

Собери податоци поврзани со потрошувачката на грицки за време на телевизиски преноси на поголеми спортски настани за период од 3 месеци. Разгледај ја честотата на различни типови грицки и претстави ги податоците со табела на фреквенции.

6.4. Графичко претставување на податоци

Податоците кои се собрани, заради поголема прегледност, често се претставуваат графички, со **дијаграм на фреквенции**. Дијаграмот е еден начин на претставување на податоци со кој се постигнува прегледност и јасност на она што сме го набљудувале, мереле, броеле и слично. При цртање на дијаграм се користат линии, геометриски фигури, слики со цел тој да биде едноставен и јасен, бидејќи најважно е податоците да се разбирливи, а заклучоците кои од нив се изведуваат лесно видливи.

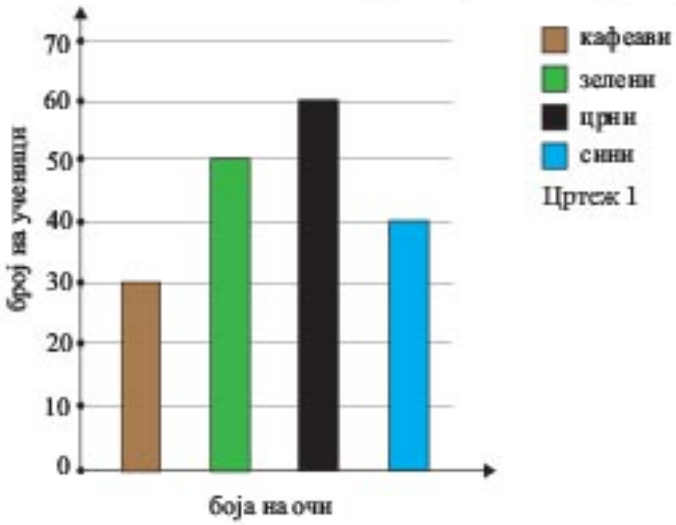
Столбест дијаграм

Столбестиот дијаграм има хоризонтална линија и вертикална линија од левата страна на хоризонталната линија. Под хоризонталната линија обично се запишува насловот на проблемот кој го истражуваме (училиште, исхрана, потрошувачка на вода, оценки и друго). По должината на вертикалната линија се запишува единичната мерка со која се изразува големината на

податоците по категории. Најчесто, кај столбестиот дијаграм се користат правоаголници со иста основа, која лежи на хоризонталната линија. Висината на секој правоаголник, односно столб, зависи од бројот на податоци кои ги претставува. Овој начин најчесто се користи за податоци кои се реални броеви од некој интервал, но не сите броеви од тој интервал. Велиме податоците се од **дискретен тип**.

ПРИМЕР 1

На цртежот 1 со столбест дијаграм прикажани се податоците за бојата на очите на 180 ученици во едно училиште. Од дијаграмот читаме, на пример, дека 60 ученици имаат црни очи, а сини и зелени очи имаат 90 ученици т.е. 50% од сите ученици.



Цртеж 1

Во овој пример податоците се претходно групирани според фреквенцијата, а потоа претставени со столбест дијаграм.

ЗАДАЧА 1

Внеси ги податоците од дијаграмот од пример 1 во табела.

ПРИМЕР 2

На цртежот 2 со столбестиот дијаграм е прикажано како едно семејство ја распределило својата заработувачка за месец октомври. Забележуваме дека семејството потрошило 47% од вкупната заработувачка за храна, 15% за облека, 25% за струја и вода, и 7% за забава. Според столбестиот дијаграм, најголем дел од заработувачката во октомври семејството потрошило за храна, а најмал дел за забава.



Цртеж 2

ЗАДАЧА 2

Дали семејството од пример 2 има заштеда за месец октомври?

ЗАДАЧА 3

Во табелата даден е бројот на 4 најмногу продавани книги, во текот на една седмица, во една книжарница. Претстави ги податоците од табелата со столбест дијаграм, земајќи 1 cm за да се претстават 10 продадени книги.

	Број на продадени книги
Книга 1	66
Книга 2	52
Книга 3	38
Книга 4	24

ЗАДАЧА 4

Во табелата дадени се вкупниот број на бодови од 3 теста по математика, што ги постигнал секој ученик поодделно. Максималниот број бодови на секој тест е 100.

а) Дополни ја табелата.

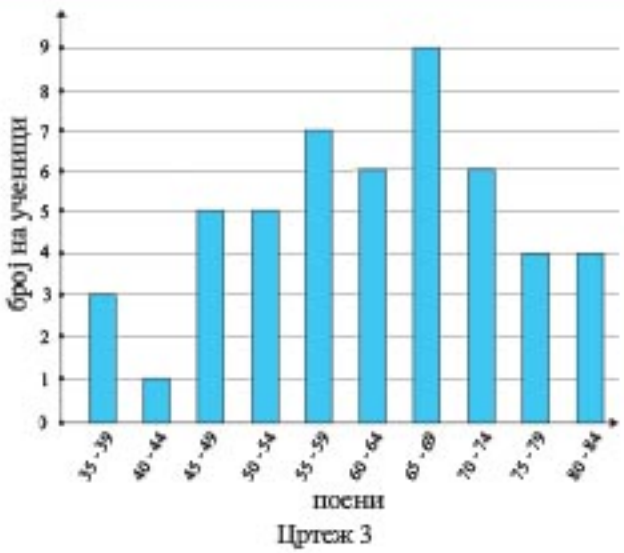
б) Податоците од табелата, во проценти, претстави ги со столбест дијаграм.

ученик	бодови	%
Миле	180	
Имер	140	
Сабрина	280	
Софија	260	

ПРИМЕР 3

Поените освоени на тест по математика на 50 ученици се следните: 35, 37, 38, 43, 45, 47, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 54, 54, 55, 56, 57, 57, 57, 59, 59, 60, 60, 62, 63, 64, 64, 65, 66, 66, 67, 68, 68, 69, 69, 69, 70, 71, 72, 72, 74, 76, 77, 75, 78, 81, 81, 84, 84.

Во овој случај табелата на фреквенции ќе биде многу долга, па затоа покорисно е податоците да се групираат по фреквенции во интервали, а потоа така групираните податоци да се претстават во **дијаграм на групирани фреквенции**. Групирањето се врши најчесто кога разликата од најголемиот податок 84 и најмалиот податок 35 се подели на еднакви делови. Во овој случај разликата е 49, па еден начин на групирање е ако земеме 10 групи со должина 5 (цртеж 3).



Цртеж 3

поени	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84
ученици	3	1	5	5	7	6	9	6	4	4

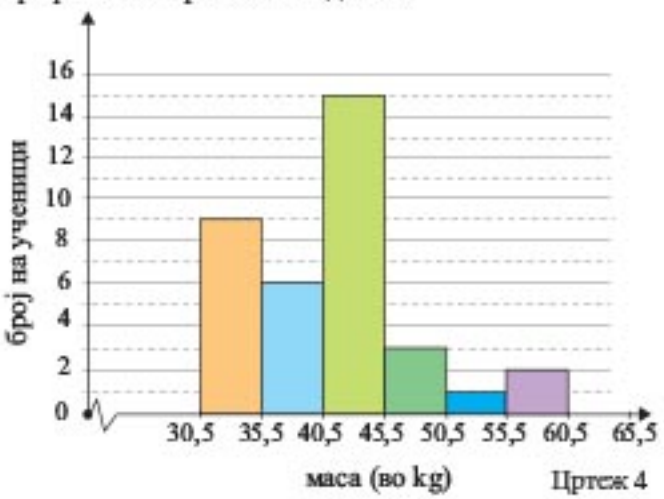
Хистограм

ПРИМЕР 4

Во еден клас се измерени масите на учениците и составена е следнава табела на групирани фреквенции:

маса во kg	број на ученици
30,5-35,5	9
35,5-40,5	6
40,5-45,5	15
45,5-50,5	3
50,5-55,5	1
55,5-60,5	2

Графичкиот приказ е следниот:



Цртеж 4

Притоа, масата од 5 kg ја претставуваме како 1 cm, по x-оската, а по y-оската го претставуваме бројот на ученици, имајќи предвид дека вредностите се движат од 1 до 15 (цртеж 4). Знакот $\wedge\!\vee$ се користи за да се потенцира дека првиот интервал не започнува од 0.

Графичкиот приказ кој се состои од правоаголници со иста ширина, споени еден до друг, се нарекува **хистограм со еднакви интервали**. Притоа плоштината на правоаголниците е правопропорционална со фреквенцијата на податоците. Овој начин на претставување се користи кога податоците се сите реални броеви од некој интервал. Велиме дека податоците се од **непрекинат тип**.

ПРИМЕР 5

Една наставничка сака да ја анализира работата на своите ученици на последниот тест по математика што може да носи најмногу 100 поени. Посебно ја интересираат оние ученици кои имаат под 20 поени и над 70 поени. Ги групирала учениците од три класа на следниов начин:

број на поени	број на ученици
0-20	7
20-30	10
30-40	10
40-50	20
50-60	20
60-70	15
над 70	8

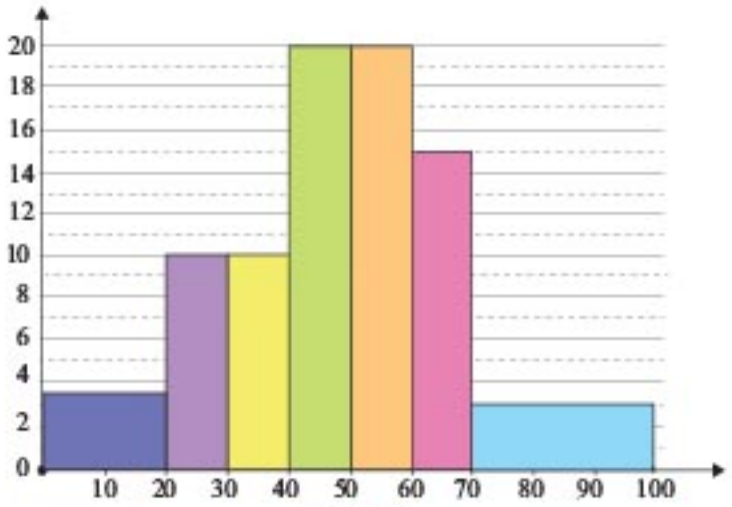
Со оглед на тоа што плоштината на правоаголниците треба да е правопропорционална со фреквенцијата, мора да се направи соодветно адаптирање и тоа во следниве чекори:

1. Се избира интервал со најмала ширина, во овој случај тоа е 10
2. Секој правоаголник има должина што е пропорционална со 10.

Според ова, се добива:

број на поени	број на ученици	ширина на класата	должина на правоаголникот
0-20	7	20	$\frac{7}{20} \cdot 10 = 3{,}5$
20-30	10	10	$\frac{10}{10} \cdot 10 = 10$
30-40	10	10	$\frac{10}{10} \cdot 10 = 10$
40-50	20	10	$\frac{20}{10} \cdot 10 = 20$
50-60	20	10	$\frac{20}{10} \cdot 10 = 20$
60-70	15	10	$\frac{15}{10} \cdot 10 = 15$
над 70	8	30	$\frac{8}{30} \cdot 10 \approx 2{,}67$

Графичкото претставувањето на податоците е прикажано на цртеж 5.



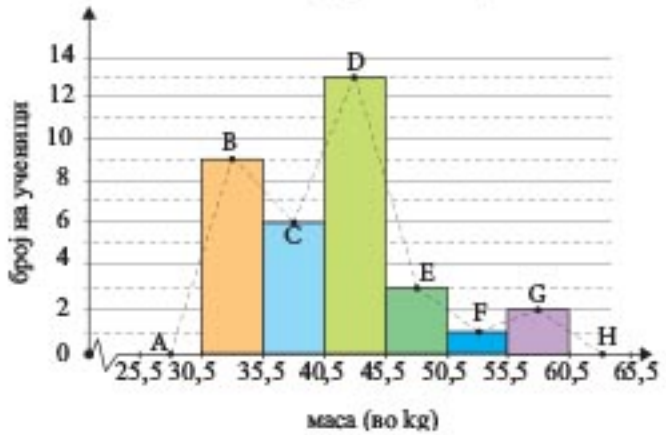
Цртеж 5

Очигледно е дека ширината на правоаголниците е различна, а нивната должина е правопропорционална со 10, што е нагласено кај вертикалната оска. Ова претставување се нарекува **хистограм со нееднакви интервали**.

Полигон на фреквенција

Ако го земеме хистограмот од пример 4, потоа ја одредиме средната точка на ширината на секој правоаголник и ги означиме со *B*, *C*, *D*, *E*, *F* и *G*, тогаш се добива искршената линија *BCDEFG*. Треба да добиеме многуаголник со делот од хоризонталната оска, па затоа земаме интервали

со иста ширина лево и десно на хоризонталната оска. Средините на тие интервали се точките *A* и *H*, соодветно. На овој начин е добиена искршената линија *ABCDEFGH*. Бидејќи работиме со плоштини, јасно е дека со „додавање" на овие интервали, заради складноста на триаголниците плоштината останува иста. На овој начин се добива графичко претставување (цртеж 6) кое се вика **полигон на фреквенција**.



Цртеж 6

ЗАДАЧА 5

На тестот по математика со најмногу 100 поени, во два класа се добиени следниве податоци. Претстави ги графички со полигон на фреквенција.

Забелешка: Графичкото претставување може да се изведе и директно без претходно да се нацрта хистограм. За таа цел треба да се одреди средната точка од секој интервал. Најчесто тоа е полузбир од левата и од десната граница на интервалот.

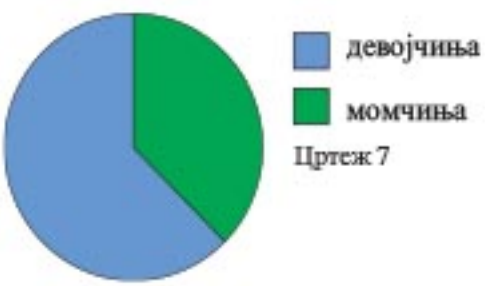
поени	број на ученици	поени	број на ученици
0-10	5	50-60	3
10-20	10	60-70	2
20-30	4	70-80	2
30-40	6	80-90	3
40-50	7	90-100	9

Кружен дијаграм

За да ги прикажеш податоците, често пати можеш да користиш круг и делови од круг. Таквиот дијаграм се нарекува **кружен дијаграм** или **секторски дијаграм.** Тој најчесто се користи кога бројот на категории кои се разгледуваат при средувањето на податоците не е многу голем.

ПРИМЕР 6

Во едно одделение од 36 ученици има 15 девојчиња и 21 момче. Има две категории: момчиња и девојчиња. Значи, кружниот дијаграм ќе биде поделен на два дела (сектори). За да се определи големината на секој од деловите, прво ќе се одреди аголот на делот со кој се претставува еден ученик. Тој агол е $360° : 36 = 10°$, па деловите во кружниот дијаграм ќе ги имаат следните агли:



Цртеж 7

- за девојчиња $10° \cdot 15 = 150°$
- за момчиња $10° \cdot 21 = 210°$.

Податоците се групирани според фреквенцијата, па потоа претставени графички (цртеж 7).

ЗАДАЧА 6

Процентуалната застапеност на емисиите на програмата на една телевизија е прикажана во следнава табела

	%	Агол
Музика	30	
Реклами	20	
Вести	6	
Филмови	40	
Спорт	4	

Дополни ја табелата и нацртај кружен дијаграм за податоците од неа. Потоа одреди колкав дел од програмата се вести, а колкав реклами? Колкав процент од програмата е посветен на образование и наука?

ЗАДАЧА 7

Распределба на парите на Симона за месец април е прикажана во следнава табела

	Денари	%	Агол
Кирија	1800		
Храна	6000		
Превоз	950		
Останато	1000		
Заштеда	250		

Дополни ја табелата и нацртај кружен дијаграм за податоците од неа. Размисли како поинаку можеш да ги одредиш секторите од кружниот дијаграм како делови од кругот.

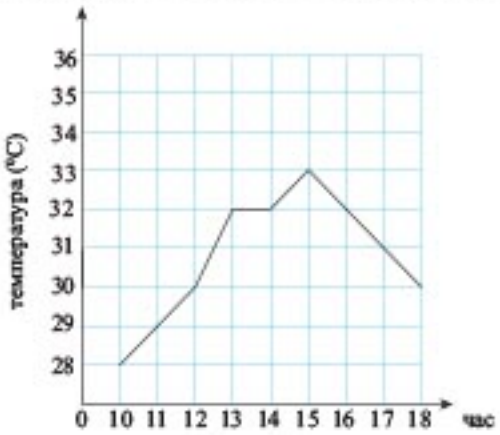
Линиски дијаграм

ПРИМЕР 7

Јана ја мерела температурата на воздухот од 10 до 18 часот и ги добила следниве резултати

час	10	11	12	13	14	15	16	17	18
температура (°C)	28	29	30	32	32	33	32	31	30

Овие мерења потоа ги претставила на цртеж 8.

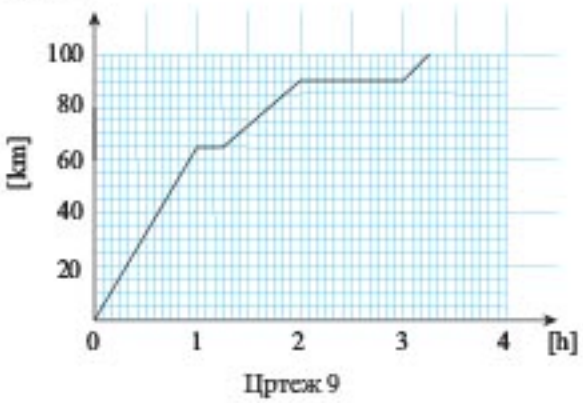


Цртеж 8

Кога за претставување на податоците се користи координатен систем, тогаш имаме **линиски дијаграм.**

ПРИМЕР 8

Тони патувал од Скопје до Кичево, и неговиот пат е прикажан со линискиот дијаграм на цртеж 9.



Цртеж 9

Од дијаграмот може да прочитаме дека:

а) растојанието поминато во првиот час од патувањето е 65 km,

б) растојанието поминато во вториот час е 25 km,

в) вкупно поминатото растојание е 100 km,

г) вкупно потрошеното време за патување е 3 часа и 15 минути.

ЗАДАЧА 8

Цената на едно чоколадо е 20 денари. Претстави ја зависноста на цената од бројот на чоколади, со линиски дијаграм, според следнава табела:

број на чоколади	5	10	15	20	25	30	35	40	45
цена	100	200	300	400	500	600	700	800	900

Пиктограм

ПРИМЕР 9

Семра ги забележала овошјата кои ги има дома на следниов начин прикажан десно:

Притоа, таа искористила **пиктограм** т.е. графикон за претставување податоци, каде што бројните вредности се претставени со слики. Тоа понекогаш го прави претставувањето на податоците поинтересно и полесно за разбирање. На овој начин со пиктограм е прикажан бројот на единки од секое од овошјата.

овошје	број
јаболка	🍎🍎🍎
лимони	🍋🍋🍋🍋
портокали	🍊🍊🍊🍊🍊🍊
банани	🍌🍌
круши	🍐🍐🍐🍐

ПРИМЕР 10

Ева ги броела сончевите денови во месец април и ги претставила со пиктограм

Легенда: Со ☀ се претставени 2 сончеви дена.

Значи, од 11 до 20 април имало 6 сончеви дена, а вкупно во април имало 13 сончеви денови.

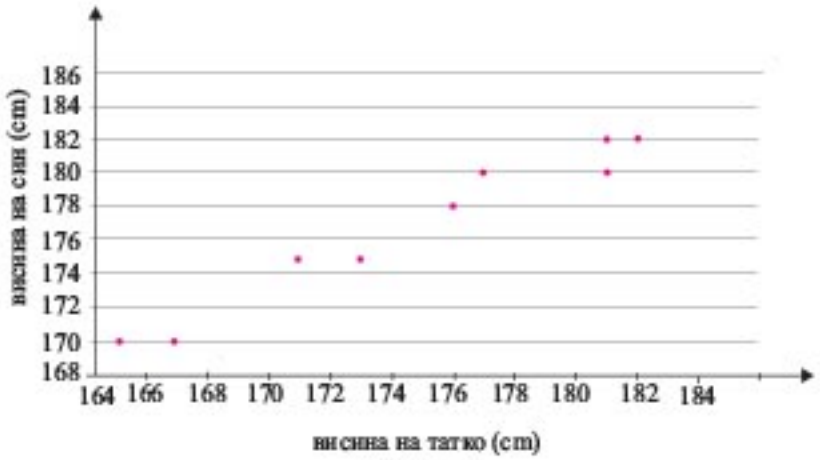
Често под пиктограмот е дадена легенда со која се прикажува на колку единки одговара одредена слика.

датум	сончеви денови
од 1 до 10	☀☀☀☀
од 11 до 20	☀☀☀
од 21 до 30	☀

Дијаграми со точки

ПРИМЕР 11

На графички приказ (цртеж 10) претставени се висините на таткото и синот како точки во координатен систем. Притоа висината во cm на таткото е претставена како x координата, а висината на синот во cm како y координата и на тој начин се добиени точки:



Цртеж 10

Од овој дијаграм лесно може да се согледа дека повисоките татковци имаат повисоки синови.

ЗАДАЧА 9

Во следнава табела е претставена максималната дневна температура и релативната влажност за месец април во неколку години во Скопје.

година	максималната дневна температура	релативната влажност
2021	19 °C	69 %
2022	18 °C	67 %
2023	20 °C	65 %
2024	21 °C	55 %
2025	22 °C	60 %

Податоците претстави ги со дијаграм со точки и провери дали со зголемување на дневната температура се намалува релативната влажност? Размисли дали ова тврдење важи насекаде?

ИСТРАЖУВАЊЕ

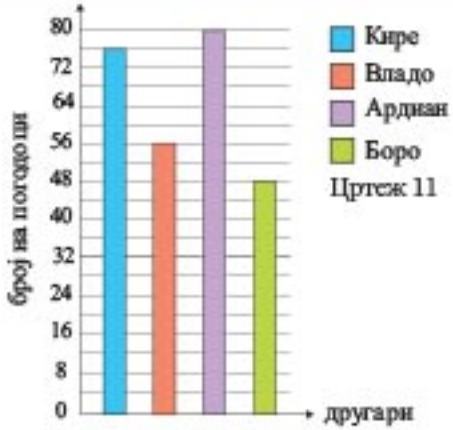
Во прилог е табела со податоци собрани од 30 ученици од едно училиште. Избери соодветно графичко претставување, а потоа одговори на прашањата:

а) Дали момчињата имаат подобри резултати во трчање на 30 метри?
б) Дали има разлика во должината на скокот во далечина, во зависност од полот?
в) Дали вежбите за подигање на телото подобро ги прават момчињата или девојчињата?
г) Дали држењето на телото е подобро кај девојчињата или момчињата?

ученик	пол	скок во далечина (m)	трчање на 30 m (sec)	подигнување на телото	држење на телото	ученик	пол	скок во далечина (m)	трчање на 30 m (sec)	подигнување на телото	држење на телото
1	м	2,23	3,91	57	одлично	16	ж	1,52	6,23	43	добро
2	м	2,28	3,73	63	добро	17	м	2,01	4,56	51	одлично
3	ж	1,42	6,15	35	лошо	18	ж	1,61	5,51	47	добро
4	м	2,12	4,13	51	одлично	19	ж	1,62	5,53	46	добро
5	м	1,45	4,18	56	добро	20	м	1,65	5,11	53	одлично
6	ж	1,51	6,03	36	лошо	21	м	1,90	4,89	51	добро
7	м	2,15	4,17	53	добро	22	м	1,67	5,06	42	лошо
8	м	2,18	3,92	57	одлично	23	ж	1,73	6,12	49	добро
9	ж	1,47	6,07	41	добро	24	ж	1,65	5,01	46	лошо
10	ж	1,51	5,78	41	добро	25	м	1,88	6,03	47	одлично
11	ж	1,52	5,52	42	лошо	26	м	2,01	4,23	48	лошо
12	ж	1,53	5,91	43	добро	27	ж	1,66	5,14	45	добро
13	м	2,03	4,53	51	добро	28	ж	1,93	5,23	52	лошо
14	м	2,05	4,56	53	лошо	29	ж	2,17	6,22	51	одлично
15	м	2,63	5,07	55	добро	30	м	1,99	6,23	56	одлично

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Другарите Кире, Владо, Ардиан и Боро, играле кошарка. Направиле експеримент. Секој од нив фрлил по 80 слободни фрлања. Погодоците што ги постигнале при тие фрлања се претставени на столбестиот дијаграм на цртеж 11.



Цртеж 11

   а) Кој од другарите постигнал најдобар резултат?

   б) Колкав дел се погодоците од вкупниот број на обиди, за секој од другарите?

   в) Направи табела за процент на погодување на четворицата другари и податоците запишани во проценти претстави ги со столбест и со кружен дијаграм.

2. Направи список на твои роднини или другари од 30 различни семејства, но во списокот запиши само по еден член од семејството.

   а) Прибери податоци дали твојот роднина или другар во своето семејство има некое од домашните миленичиња, маче, куче или папагалче.

   б) Прибраните податоци среди ги во табела.

   в) Податоците запиши ги во проценти, а потоа претстави ги со столбест и кружен дијаграм.

   г) Колкав процент од семејствата имаат домашно милениче?

3. Цената на половина литар кисело млеко во текот на 5 месеци изнесувала

	јануари	февруари	март	април	мај
кравјо	45	47	44	40	40
овчо	57	60	55	51	51

   Претстави ги овие податоци во еден столбест дијаграм.

4. Претстави ги со кружен дијаграм времето поминато во текот на еден ден, во следните активности: спиење, училиште, учење дома, играње, друго.

5. Во секторскиот дијаграм на цртежот 12 прикажана е процентуалната застапеност на 8 видови чевли во продажбата на една продавница во еден месец. Ако вкупниот број продадени чевли во текот на месецот бил 1000, најди го бројот на продадени чевли од секој вид.



Цртеж 12

6. Во следнава табела е дадено количеството на врнежи во Битола изразено во литри на m^2 (l/m^2) во одредени години.

година	1990	1995	2000	2005	2010	2011	2012	2013
количество врнежи (l/m^2)	516	653	403	647	788	381	742	621
година	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
количество врнежи (l/m^2)	850	671	685	538	679	576	649	690

   Претстави ги со линиски дијаграм овие податоци.

6.5. Обработка и толкување на податоци

ЗАДАЧА 1

Миа и Амир правеле тест по математика со 5 задачи, а секоја точно решена задача се вреднува со 10 поени и ги добиле следните резултати:

	1	2	3	4	5
Миа	10	8	9	8	7
Амир	6	7	10	9	10

Кој критериум за успех ќе го избереш за да одредиш кој од нив е поуспешен?



Аритметичка средина на два или повеќе броеви е бројот што се добива кога нивниот збир ќе се подели со бројот на собироците.

Аритметичка средина понекогаш се нарекува и **просечна вредност** или само **просек**.

ПРИМЕР 1

Селма на крајот на првото полугодие ги имала следниве оцени по предметите во прва година на средното образование:

Македонски јазик и литература	5
Математика	4
Прв странски јазик	4
Втор странски јазик	3
Биологија	4
Хемија	5
Физика	4
Историја	5
Географија	5
Информатика	4
Музичко образование	3
Ликовно образование	4
Физичко и здравствено образование	5

Според тоа, просечниот успех на Селма на крајот на полугодието е

$$\frac{5+4+4+3+4+5+4+5+5+4+3+4+5}{13} = \frac{55}{13} = 4{,}23.$$

Забелешка: Аритметичката средина на броевите секогаш се наоѓа меѓу најмалиот и најголемиот број.

ПРИМЕР 2

Сигурно забележа дека Миа и Амир од задача 1 имаат освоено ист број вкупни поени. Ова значи дека одредувањето на ученикот со подобар успех мора да продолжи. Просечниот број на освоени поени по задача на Миа и Амир е ист бидејќи $\frac{10+8+9+8+7}{5}=\frac{42}{5}=8{,}4$ и $\frac{6+7+10+9+10}{5}=8{,}4$. Според тоа, за да утврдиме кој од двајцата ученици има подобар успех треба да ги споредиме освоените поени по задачи. За таа цел ни требаат дополнителни постапки и поими.



Множествата од податоци, при што податоците се броеви или мерни броеви подредени по големина, од најмалиот до најголемиот, се вика и **низа податоци**.



Ако постои број што се појавува најчесто, односно најголем број пати, во низа податоци, тогаш тој број се вика **мода** (m) на низата.



Ако бројот на податоци во подредена низа податоци е непарен, тогаш бројот што се наоѓа на средината од таа низа, се вика **медијана** (m_e) на низата. Ако, пак, бројот на податоци во подредената низа податоци е парен, тогаш аритметичката средина на двата броја што се наоѓаат на средината од таа низа, се вика медијана на низата.



Во дадена низа податоци, разликата на највисоката со најниската вредност од податоците се вика **ранг** (r) или **опсег**.

ПРИМЕР 3

Низата на податоци на Миа е: 7, 8, 8, 9, 10, од каде што заклучуваме дека мода на низата е $m_1=8$, медијаната е $m_{e1}=8$, а рангот $r_1=10-7=3$. Низата на податоци на Амир е: 6, 7, 9, 10, 10, од каде заклучуваме дека мода на низата е $m_2=10$, медијаната е $m_{e2}=9$, а рангот $r_2=10-6=4$.
Значи досега дознавме дека:

	Миа	Амир
просек	8,4	8,4
мода	8	10
медијана	8	9
ранг	3	4

Останува да поставиме критериуми за успех:

а) Ако ги набљудуваме вредностите на мода и медијана, ќе заклучиме дека тие се блиски до просекот, што значи дека низата со податоци помалку отскокнува од просекот.

Таква е првата низа т.е. таа е поконзистентна.

б) Ако ги набљудуваме само најдобрите резултати, тогаш втората низа податоци е подобра.

ЗАДАЧА 2

Во период од 20 дена сервисот за поправка на електрични апарати ги добил следниве броеви на повици, дневно:
6 6 3 2 7 4 2 4 7 6
3 4 2 6 2 6 5 3 7 5
Одреди аритметичка средина, мода, медијана и ранг на низата податоци.

ПРИМЕР 4

Висините на учениците од едно училиште се претставени со следнава табела

висина (cm)	пониски од 116	116-120	121-125	126-130	131-135	136-140	141-145	повисоки од 145
број на ученици	2	38	65	124	131	127	150	74

Доколку податоците се претставени со групирана табела на фреквенции, не може да се најде модата, затоа што не се знаат поединечните вредности. Овде се бара **модалната класа** на податоците, а тоа е класата со најголема фреквенција. Најголема фреквенција има групата 141-145, па таа е модалната класа за овие податоци. Медијаната се наоѓа во класата 131-135 бидејќи таму е 356-тиот член на низата податоци.

ЗАДАЧА 3

Дадена е низата податоци: 11, 3, 5, 7, 9, 11, 6, 8, 8, 7, 5, 10.

а) Додај еден број така што мода на низата е 8,

б) Додај еден број така што медијана е 7,

в) Додај еден број така што аритметичката средина е 9.

Користење на софтверски програми за табеларни пресметувања

ПРИМЕР 5

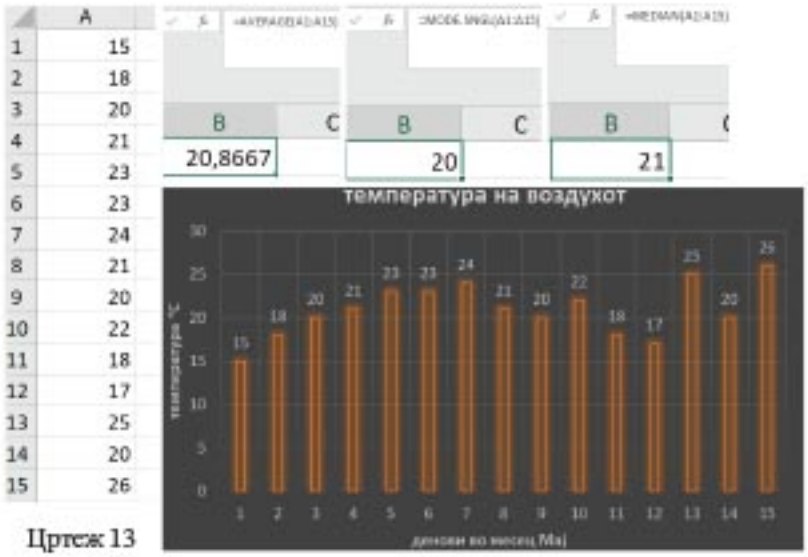
Јован ја мерел температурата на воздухот во степени Целзиусови, секој ден во 14 часот, 15 дена последователно и ги добил следниве податоци:

15	18	20	21	23
23	24	21	20	22
18	17	25	20	26

Овие податоци може да ги внесеш во едукативен софтвер што има можност за табеларни пресметувања. Потоа можеш да ги избереш следниве копчиња/функции:

- AVERAGE, за да пресметаш аритметичка средина,
- MOD, за да одредиш која вредност е мода,
- MEDIAN, за да одредиш која вредност е медијана.

На крај со помош на копчето Chart се добива графички приказ на податоците (цртеж 13). Притоа можеш да избереш каков графички приказ ќе користиш.



Цртеж 13

ЗАДАЧИ ЗА ВЕЖБАЊЕ

1. Најди ја аритметичката средина и рангот на податоците:

   а) 22, 4, 5, 9 и 17; б) 7, 17 и 54; в) 4, 2 и $6\frac{1}{3}$ г) 2,18; 5,38; 10,2 и 18,6.

2. Пет ученици се натпреварувале во дисциплината скок во далечина и ги постигнале следните резултати: Миле скокнал 1,6 m, Агим 2,05 m, Зоран 1,85 m, Павле 1,55 m и Стојан 1,9 m. Најди ја просечната вредност на должините на скоковите.

   а) Колку изнесува просечната должина скок за натпреварувачите?

   б) Колку изнесува рангот на должините на скоковите?

3. Фитим поминал 3 часа во возење. Првите два часа возел со брзина 80 km на час, а третиот час со брзина од 50 km на час. Колку пат поминал и со која просечна брзина возел?

4. Во еден клас има 30 ученици. На крајот на учебната година осуммина од нив имале оценка 5 по математика, десетмина имале оценка 4, деветмина имале 3, а преостанатите оценка 2.

   а) Одреди го просечниот успех на учениците од тоа одделение по математика,

   б) Претстави ги со столбест дијаграм оценките.

5. Во краварската фарма „Црна крава-бело млеко“ производството на млеко во текот на 6 месеци изнесувало:

месец	млеко (литри)
јануари	456
февруари	432
март	556
април	621
мај	345
јуни	432

Најди го просечното месечно производство на млеко, медијаната и модата на овие податоци.

6. Биолозите ја измериле должината на 190 листа

должина (cm)	0-1,9	2-3,9	4-5,9
број на листови	3	33	62
должина (cm)	6-7,9	8-9,9	10-11,9
број на листови	49	36	7

Најди ја модалната класа на овие податоци? Претстави ги со столбест дијаграм.

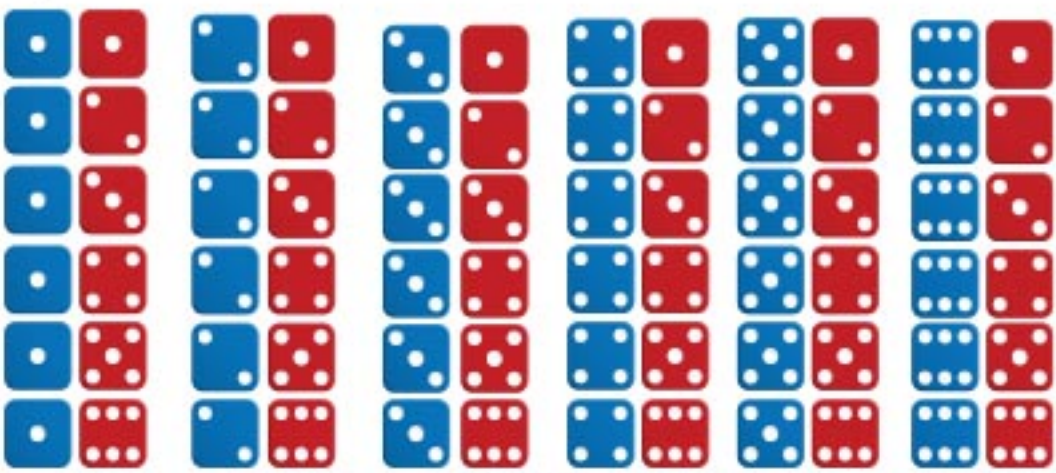
ИСТРАЖУВАЊЕ

Хипотеза е претпоставка која е заснована на ограничен број докази и најчесто е почеток за понатамошно истражување. Таа мора да биде тестирана преку експерименти или набљудувања за да се потврди или отфрли.

Направи истражување помеѓу соучениците од твоето училиште со цел проверка на следнава хипотеза: „Користењето на вештачката интелигенција (ВИ) го подобрува учењето преку персонализирани пораки и адаптивни алатки“. Избери примерок, подготви прашалник, обработи ги добиените податоци, претстави ги и толкувај ги добиените резултати.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Се фрлаат истовремено две коцки за играње, црвена и сина (слика 1). Одреди ја веројатноста на настанот:
   а) збирот на двете коцки е 7,
   б) збирот на двете коцки е 8,
   в) збирот на двете коцки не е поголем од 12,
   г) збирот на двете коцки е поголем или еднаков на 7.



Слика 1

2. Тркало на среќата има 8 полиња и стрелка која по завртувањето застанува на еден од броевите од 1 до 8 (цртеж 1). Колкава е веројатноста дека по едно завртување стрелката ќе застане на:

а) бројот 1, б) непарен број,

в) број поголем од 3 г) број помал од 9.



Цртеж 1

3. Коцка се фрла еднаш. Одреди ја веројатноста:

а) падна број меѓу 2 и 5, б) падна прост број

4. Извлечена е една карта од шпил од 52 карти. Колкава е веројатноста дека извлечената карта е:

а) црвен поп б) слика в) џандар срце г) треф?

5. Купче од 20 пенкала со дефект по грешка биле ставени во кутија со 130 исправни. Пенкалата биле измешани и од кутијата било земено едно пенкало. Колкава е веројатноста извлеченото пенкало да биде:

а) исправно, б) неисправно?

6. Броевите од 1 до 90 се испишани на 90 различни картички и ставени во непрозирен сад. Од садот се влече една картичка. Одреди ја веројатноста дека на неа е напишан:

а) полн квадрат, б) број делив со 5, в) двоцифрен број.

7. Масите на 100 луѓе се дадени во следнава табела

маса (kg)	20-39	40-45	46-50	51-55
фреквенција	6	8	22	31
маса (kg)	56-60	61-70	71-80	над 80
фреквенција	12	11	5	5

Најди ја модалната класа на овие маси? Претстави ги податоците со столбест дијаграм.

8. Поените на писмената работа по математика што ги добиле учениците од еден клас се претставени со следнава групирана табела на фреквенции

поени	0-25	26-49	50-71	72-87	86-100
број на ученици	3	8	13	10	8

Одреди ја модалната класа.

9. Аце често доцни на првиот час. Бројот на минути во текот на месец мај го запишал во следнава табела на фреквенции:

број на минути	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
број на денови	1	3	2	4	6	3	4	4	3	1

Одреди мода и медијана на низата податоци.

10. Во една просторија имало 16 луѓе чија просечна возраст била 20 години, а во друга просторија имало 24 луѓе чија просечна возраст била 40 години. Колкава е просечната возраст на сите тие 40 луѓе?

11. Во текот на десет дена е забележана продажбата на чоколади во една продавница. Првиот ден се продадени 23 чоколади, потоа следните 5 дена продажбата се зголемувала за по 2 чоколади дневно, а последните 4 дена останала иста со шестиот ден.

а) Претстави ги податоците во табела.

б) направи линиски дијаграм на продажбата.

12. Во една продавница за мобилни телефони, бројот на продадени телефони во текот на првите шест месеци од годината била следнава:

месец	број на продадени телефони
јануари	30
февруари	55
март	45
април	70
мај	50
јуни	25

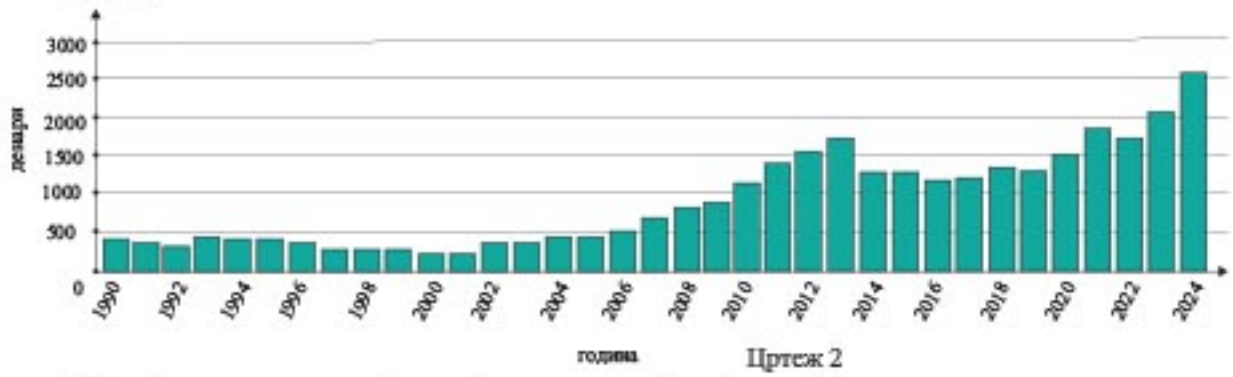
Претстави го бројот на продадени телефони со пиктограм.

13. Бројот на жители на 4 градови е даден во следнава табела.

Град	Население
Битола	80 000
Куманово	75 000
Прилеп	65 000
Тетово	50 000

Направи пиктограм за овие податоци.

14. Цената на еден производ од 1990 до 2024 година се менувала како што е прикажано на цртежот 2.



Цртеж 2

а) Во која година цената била најниска, а во која највисока?

б) Во кои години цената се движела меѓу 1500 и 2000 денари?

в) Во кои 3 последователни години просечната цена е околу 2000 денари?

15. На систематски преглед измерени се височините на 10 ученици од еден клас и добиени се следниве димензии во cm:

172,0	175,5	184,0	167,4	169,2
175,5	183,2	175,5	182,3	168,3

Со помош на едукативен софтвер одреди аритметичка средина, мода и медијана, а потоа избери и соодветен графички приказ.

16. Фестивал со аматерски драмски изведби се одржува секоја година во исто време. Комисијата за оценување брои 5 члена, кои независно оценуваат со бодови од 6 до 10. На фестивалот имало 7 различни аматерски драми и добиени се следните оценки од комисијата:

број на претстава	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
прв член	7	8	9	10	9	8	10
втор член	8	9	7	6	7	8	10
трет член	9	8	6	7	7	10	6
четврт член	7	8	7	8	10	6	7
петти член	8	9	10	9	6	6	10

Со помош на едукативен софтвер одреди аритметичка средина, мода и медијана, а потоа избери и соодветен графички приказ на податоците за секоја од драмите, а потоа одреди која од нив е победник на фестивалот.

17. Аритметичката средина на броевите 173, 158, 196, 151, 205, 214 и x е еднаква на 163. Одреди ја вредноста на x.

18. Растојанието, во километри, на 40 вработени до една фабрика, е дадено во табелата:

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
6	12	7	12	14	2	9	6	15	15

Направи табела со групирани фреквенции, со класи со должина 5.

а) На кое растојание од фабриката живее најголемиот број на вработени?

б) Колкав дел од вработените, изразен во проценти, живеат на растојание помало од 15 километри до фабриката?

в) Дали е исплатливо фабриката да обезбеди превоз во висина од една просечна плата, за сите работници кои живеат на растојание поголемо од 16 километри ако е познато дека за превоз на секој работник се исплаќаат 10% од платата?

19. Три монети се фрлаат истовремено 30 пати. Бројот на појавени „глави“ е даден во табелата:

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

Состави табела на фреквенција и претстави ги податоците со столбест дијаграм.

20. Во тегла има 24 џамлии од кои некои се зелени, а другите сини. Извлечена е џамлија од садот. Веројатноста дека таа е зелена е $\frac{2}{3}$. Одреди го бројот на сини џамлии во садот.

21. Во кутија има 12 топчиња меѓу кои точно x се црни.

а) Колкава е веројатноста едно извлечено топче да е црно?

б) Ако во садот се додадат 6 црни топчиња, веројатноста да се извлече црно топче сега е двојно поголема од таа претходно. Одреди ја вредноста на x.

22. Во еден сад има 5 црвени и неколку сини топчиња. Познато е дека веројатноста да се извлече едно сино топче е двапати поголема од веројатноста да се извлече црвено топче. Одреди колку сини топчиња има во садот.

23. Фрлаш коцка на под на кој има тепих во облик на правоаголник со должина 3 m и ширина 2 m. На тепихот има нацртан круг со дијаметар 1 m. Колкава е веројатноста дека коцката ќе падне на оној дел од тепихот кој е:

а) надвор од кругот,

б) внатре во кругот?

КОРИСТЕНА ЛИТЕРАТУРА

1. В.М. Клопский, З.Д. Скопец, М.И. Ягодовский - Геометрия. Учебное пособие для 9 и 10 классов-Просвещение (1977)
2. Polygons – Ismail Ersozoglu, Zambak
3. Mathematics, textbook for class IX, NCERT
4. VEGA 1, i-učbenik za matematiko v 1. letniku gimnazije,Avtorji: Andreja Mohorčič, Simona Pustavrh, Mateja Škrlec, Helena Kapus, Vesna Zmazek, Oskar Jericijo, Irena Rauter Repija